

THEORIE DES NOMBRES

- Besançon -

Année 1976-77

ANIMAUX PLANS ET GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

Robert BANTEGNIE

Faculté des Sciences. Mathématique

ERA. CNRS N° 070654

25 030 BESANCON Cedex

## ANIMAUX PLANS ET GROUPE CRISTALLOGRAPHIQUES

=====

par R. Bantegnie.

Introduction.

Pour  $K \subset \mathbb{R}^2$  ( $K$  est supposé borné et de mesure strictement positive), et un groupe cristallographique  $\Phi$  d'isométries de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\overline{\eta}_\Phi(K)$  désigne la borne supérieure, pour  $\Sigma \approx \Phi$ , de la densité d'empilement de la famille  $(K, \Sigma) = \{ \sigma K \}_{\sigma \in \Sigma}$ . (Les densités d'empilement sont définies comme le fait Fejes Toth dans [5] ou comme dans [2]).

$\overline{\eta}_\Phi(K) = 1$  équivaut à dire qu'à un ensemble de mesure nulle près on peut trouver  $\Sigma \approx \Phi$  tel que  $K$  soit une partie fondamentale pour  $\Sigma$ .

Il est facile de trouver  $K$  tel que  $\eta(K) \neq 1$  alors qu'on peut trouver  $\Phi$  avec  $\overline{\eta}_\Phi(K) = 1$ . ( $\eta(K) = \eta_{p1}(K)$  où  $p1$  est le groupe cristallographique engendré par deux translations non parallèles s'appelle densité régulière d'empilement de  $K$ ).

On a étudié ailleurs ([2]) la généralisation de ce phénomène à  $\mathbb{R}^n$  pour  $n > 2$  et pour  $n = 2$  le cas des animaux plans.

Nous voulons ici préciser un état partiel de nos connaissances sur ces animaux et donner, quand  $\Phi$  est un groupe d'isométries directes (le cas général sera étudié ailleurs) quelques précisions sur les  $K$  compacts simplement connexes tels que  $\overline{\eta}_\Phi(K) = 1$ .

En passant nous avons donné quelques indications sur les polygones pavants.

### Les groupes cristallographiques du plan.

Dans  $\mathbb{R}^2$ , il y a 17 groupes cristallographiques non isomorphes qui sont ( nous employons la notation internationale et pour l'instant l'ordre de [14] ).

$p1, p2, pm, pg, cm, pmm, pmg, pgg, cmm, p4, p4m, p4g, p3, p3m1, p31m, p6, p6m.$

( On trouve une description complète de ces groupes dans [20] et on peut se reporter à [4] ou à [7] pour leur détermination ).

Notons :

a)  $pmm, p3m1, p4m, p6m$  sont les 4 groupes engendrés uniquement par des symétries ;

b)  $p1, p2, p3, p4, p6$  sont les 5 groupes ne contenant que des isométries directes ;

c)  $p1, p2, p3, p4, p6, pg, pgg$  sont les 7 groupes ne contenant pas de symétrie ;

d) -  $p1, pm, pg, cm$  n'admettent que l'identité comme rotation,

-  $p2, pmm, cmm, pmg, pgg$  n'admettent que des rotations d'ordre 2 ou 1,

-  $p3, p3m1, p31m$  que des rotations d'ordre 3 ou 1,

-  $p4, p4m, p4g$  que des rotations d'ordre 4, 2 ou 1,

-  $p6, p6m$  que des rotations d'ordre 6, 3, 2 ou 1.

### Polygones cristallographiques et mosaïcaux.

$K \subset \mathbb{R}^2$  est dit pavant s'il existe une famille  $\Gamma$  d'isométries telle que  $\{ \gamma K \}_{\gamma \in \Gamma}$  pave  $\mathbb{R}^2$ .

Rappelons qu'une famille infinie dénombrable de polygones fermés ( un polygone est toujours supposé ici d'intérieur non vide simplement connexe )  $(\Pi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une mosaïque de  $\mathbb{R}^2$  quand simultanément :

(i) pour  $i$  distinct de  $j$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\Pi_i \cap \Pi_j$  est soit un côté commun à  $\Pi_i$  et  $\Pi_j$ , soit un point, soit  $\emptyset$ ;

$$(ii) \mathbb{R}^2 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Pi_i .$$

(On suppose souvent les  $\Pi_i$  convexes).

Un polygone  $P$  est appelé mosaïcal si à l'aide d'isométries de  $P$ , on peut former une mosaïque de  $\mathbb{R}^2$ , il est appelé cristallographique si l'on peut trouver un groupe cristallographique  $\Phi$  tel que  $\overline{\eta_\Phi}(P) = 1$ , il est appelé cristamosaïcal si l'on peut trouver  $\Sigma$  cristallographique tel que les transformés de  $P$  par  $\Sigma$  forment un pavement mosaïcal de  $\mathbb{R}^2$ .

On peut montrer qu'un polygone ne peut être mosaïcal s'il a au moins 7 côtés.

Les triangles et les quadrilatères sont cristamosaïcaux.

Parmi les polygones réguliers seuls les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones réguliers sont mosaïcaux. Ils sont cristamosaïcaux.

On connaît les hexagones convexes cristamosaïcaux. On les décrit comme Kerschner dans [16] (noté  $\underline{K}$  dans la suite).

Soit  $ABCDEF$  un hexagone,  $a, b, c, d, e, f$  ses côtés numérotés de façon que  $a$  et  $b$  soient les côtés de  $\hat{A}$ ,  $b$  et  $c$  ceux de  $\hat{B}$ , etc...

Il existe 3 types d'hexagones convexes cristamosaïcaux :

type 1 :  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\pi$ ,  $a = d$  ( $a$  et  $d$  sont équipollents)

type 2 :  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 2\pi$ ,  $a = d$ ,  $c = e$

type 3 :  $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = \frac{2}{3}\pi$ ,  $a = b$ ,  $c = d$ ,  $e = f$

(dans ce cas,  $A\hat{C}E$  est équilatéral)

De plus si un hexagone convexe est pavant, il est obligatoirement d'un des types précédents (cf [3] et [16]).

On conjecture que les hexagones mosaïcaux sont ceux des trois types ci-dessus où les hexagones ne sont pas supposés convexes.

En tout cas, le fait que ces hexagones sont cristamosaïcaux se voit facilement, ceux du type 1 permettent un pavement du plan à l'aide de  $p_2$ , ceux du type 2 à l'aide de  $pg$  et ceux du type 3 à l'aide de  $p_3$ . Notons par exemple que les hexagones centrés sont du type 1. On ne connaît pas les pentagones convexes mosaïcaux.

( La liste donnée par  $\underline{K}$  des pentagones convexes pavants est incomplète comme il résulte d'un exemple de R. James ( cf [15] et [21] ) et d'exemples trouvés par M. Rice [19] ).

On ne connaît pas non plus les pentagones convexes mosaïcaux ( la liste de  $\underline{K}$  est incomplète même pour ce cas ).

Par contre, une étude récente de Grünbaum et Shephard ( [12] noté GS dans la suite ) permet de déterminer les pentagones convexes cristamosaïcaux.

$\underline{K}$  notant  $ABCDE$  un pentagone de côtés  $a, b, c, d, e$  ( les côtés de  $\hat{A}$  sont  $a$  et  $b$ , etc... ) a considéré notamment les types 1-5 de pentagones convexes.

$$\text{Type 1 : } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\pi \text{ (ou } \hat{D} + \hat{E} = \pi \text{ ) ;}$$

$$\text{Type 2 : } \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 2\pi, \quad a = d \text{ ;}$$

$$\text{Type 3 : } \hat{A} = \hat{C} = \hat{D} = \frac{2}{3}\pi, \quad d = c + e \text{ ;}$$

$$\text{Type 4 : } \hat{A} = \hat{C} = \frac{1}{2}\pi, \quad a = b, \quad c = d \text{ ;}$$

$$\text{Type 5 : } \hat{A} = \frac{1}{3}\pi, \quad \hat{C} = \frac{2}{3}\pi, \quad a = b, \quad c = d.$$

Il a montré que ces pentagones sont cristallographiques, ceux des types 4 et 5 étant cristamosaïcaux.

Si l'on considère les pentagones cristallographiques, d'après GS, les types 2 et 3 ne sont jamais cristamosaïcaux et le type 1 n'est cristamosaïcal que dans le cas particulier du type 1\* :  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\pi$ ,  $a = d$  (  $a$  et  $d$  sont équipollents ).

Par contre si un pavement cristallographique est obtenu à l'aide d'un pentagone du type 4 ou du type 5, ce pavement est nécessairement mosaïcal.

Dans la figure 1 page 5 bis, figurent les pavements cristamosaïcaux qu'on peut obtenir pour le type  $1^*$  et aussi ceux que de plus on peut obtenir pour le cas particulier du type  $1^{**}$  :  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\pi$ ,  $a = d$ ,  $b = c$ .

On présume que la convexité n'a rien à voir dans la question.

Notons que K a introduit aussi les types 6-7-8 de pentagones convexes :

$$\text{Type 6 : } \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 2\pi, \hat{A} = 2\hat{C}, a = b = e, c = d ;$$

$$\text{Type 7 : } 2\hat{B} + \hat{C} = 2\pi, 2\hat{D} + \hat{A} = 2\pi, a = b = c = d ;$$

$$\text{Type 8 : } 2\hat{A} + \hat{B} = 2\pi, 2\hat{D} + \hat{C} = 2\pi, a = b = c = d$$

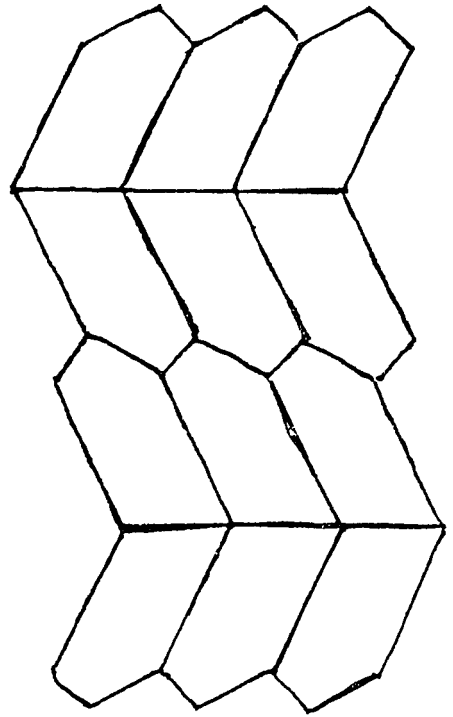
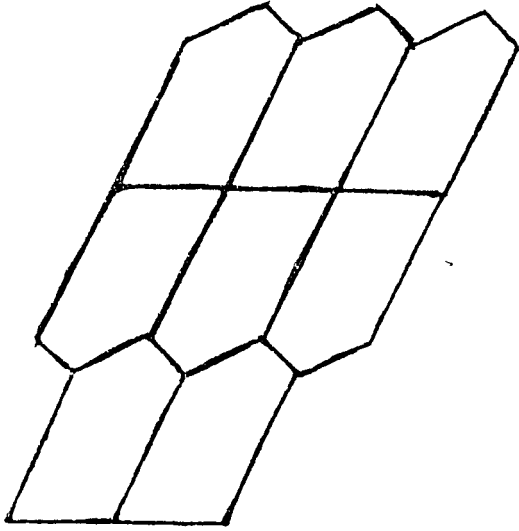
et a prouvé que ces pentagones sont mosaïcaux (ils ne sont pas cristallographiques, mais on peut former avec eux un pavement périodique ou semi-cristallographique (cf. [2])).

M. Rice [19], [22] a trouvé un autre type de pentagones possédant les mêmes propriétés à savoir le type 9 :  $2\hat{D} + \hat{C} = 2\pi$ ,  $2\hat{E} + \hat{B} = 2\pi$ ,  $a = b = c = d$  (EX. plus particulier en degrés  $\hat{A} = 79$ ,  $\hat{B} = 136$ ,  $\hat{C} = 66$ ,  $\hat{D} = 147$ ,  $\hat{E} = 112$ ).

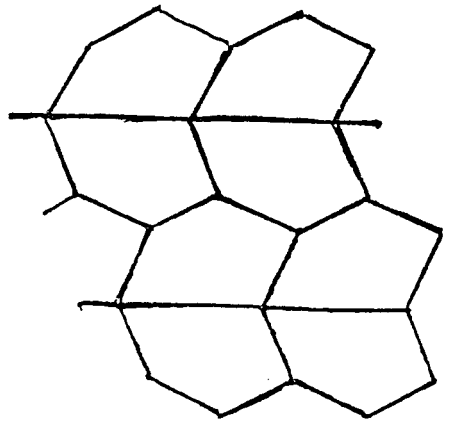
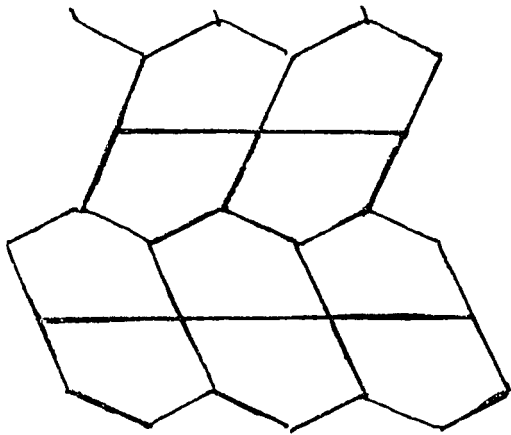
Il en résulte, comme déjà indiqué, qu'on ne connaît pas les pentagones convexes mosaïcaux. On conjecture que les types 1-9 sont tous les types possibles pour ces pentagones.

Pour suggérer la difficulté du problème, notons que l'on doit faire la distinction entre un type de pentagone pavant et un "type" de pavement à l'aide d'un tel pentagone, à un même type pouvant correspondre plusieurs "types" distincts. Cela est vrai aussi pour les pentagones mosaïcaux. Ce phénomène a déjà été remarqué pour les pentagones du type  $1^*$  pour lesquels on a donné deux "types" de pavement cristamosaïcal (pour ces pentagones,

Figure 1



Pavements cristamosaïcaux pour le type 1\*



Pavements cristamosaïcaux valables seulement pour le type 1\*\*

il y a d'autres "types" de pavements mosaïcaux non cristallographiques ) et de plus d'autres "types" de pavements cristamosaïcaux possibles seulement pour le type particulier  $1^{**}$ .

Dans la figure 2 page 6 bis figurent quelques exemples supplémentaires.

Les pentagones ( non nécessairement convexes ) du type  $1^{***}$  :  
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\pi$ ,  $a = d + e \cos \hat{E}$ ,  $b = c$  sont mosaïcaux. Notons que le pavement mosaïcal périodique qu'on obtient avec eux n'est pas cristallographique mais semi-cristallographique d'indice 2.

Ces pentagones permettent aussi de construire des pavements mosaïcaux non périodiques.

### 3. Animaux plans.

Soit  $P$  un polygone régulier d'adhérence  $\overline{P}$ .

On dit que  $\Pi_k$  est un  $k$ -animal fermé (régulier) construit sur  $P$  si l'on a :

$$\Pi_k = \overline{\bigcup_{i=1}^k P_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^k \overline{P}_i} \quad \text{avec simultanément}$$

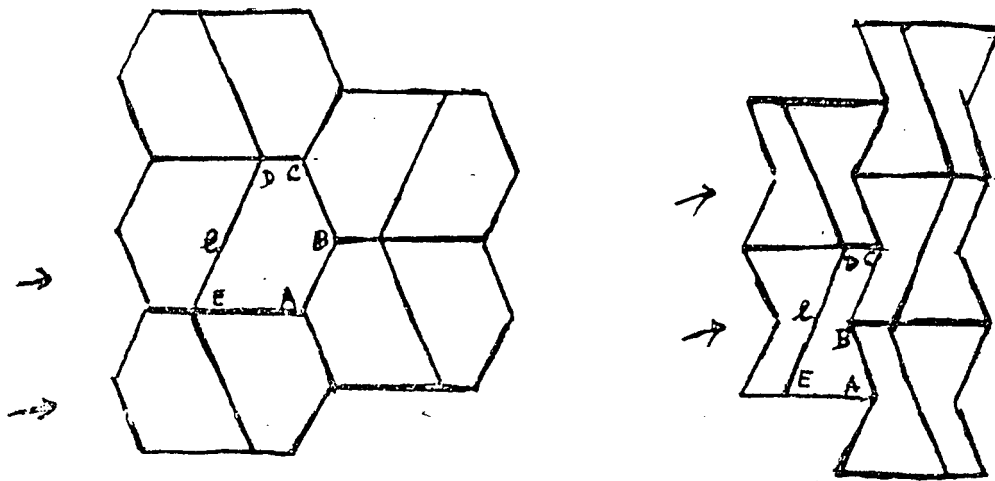
- (i) pour  $i=1, \dots, k$ ,  $P_i$  est isométrique à  $P$  ( $P_i \simeq P$ )
- (ii) pour  $i=1, \dots, k-1$ ,  $(\overline{\bigcup_{j=1}^i P_j}) \cap P_{i+1} = \emptyset$
- (iii) pour  $i=1, \dots, k-1$ ,  $\overline{P}_i \cap \overline{P}_{i+1}$  est un côté commun à  $\overline{P}_i$  et  $\overline{P}_{i+1}$ .

On en déduit que pour  $k > 1$ ,  $\overline{\bigcup_{i=1}^{k-1} P_i}$  est un  $(k-1)$ -animal construit sur  $P$ , et que, si  $\text{mes } A$  désigne la mesure de  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\text{mes } \Pi_k = k \text{mes } P$ .

On peut dans ce qui précède remplacer  $P$  par l'intérieur d'un polygone mosaïcal. On obtient alors un animal dit mosaïcal. ( La notion introduite ici généralise pour les animaux plans celle introduite dans [2] et portant le même nom, les animaux mosaïcaux introduits là correspondant au cas où  $P$  est un parallélogramme ou un hexagone centré ). Notons qu'en général un

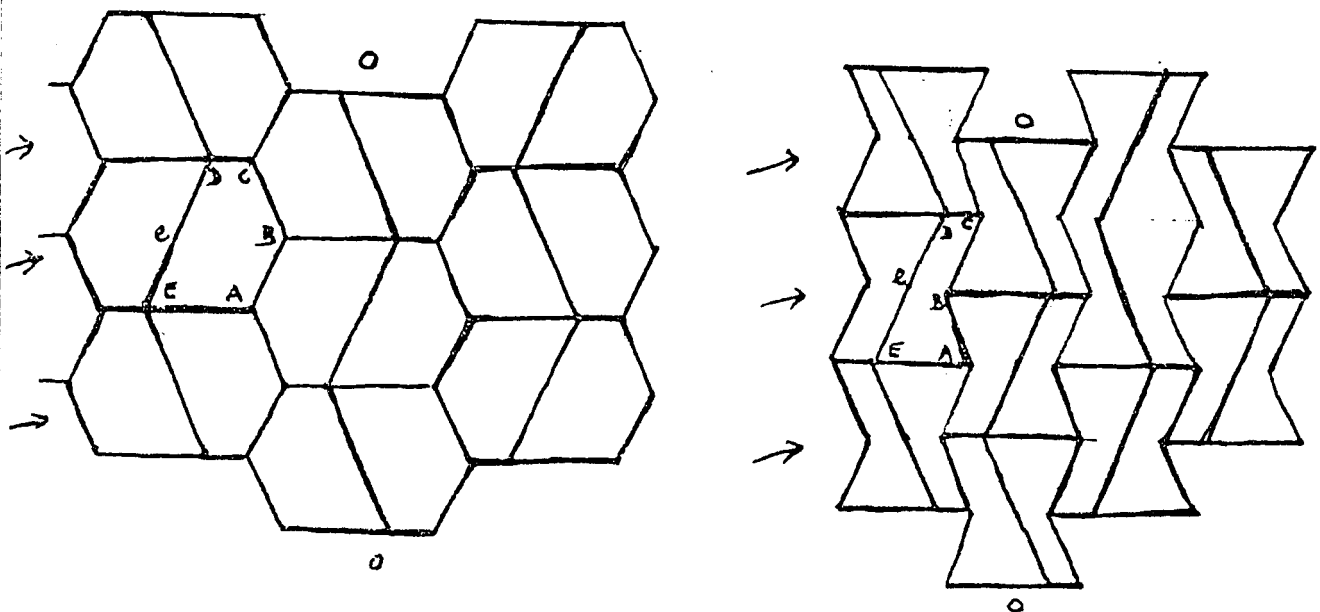


Figure 2



( dans chaque rangée suggérée par une flèche les cotes égaux à  $e$  sont parallèles ).

Pavements mosaïcaux périodiques par des pentagones du type 1<sup>\*\*\*</sup>



( dans chaque rangée suggérée par une flèche les côtés égaux à  $e$  sont parallèles sauf dans la colonne marquée 0 où le côté égal à  $e$  a une direction non parallèle aux précédentes )

Pavements mosaïcaux non périodiques par des pentagones du type 1<sup>\*\*\*</sup>

animal mosaïcal n'est pas un polygone mosaïcal.

Si  $K$  est un animal plan, il est cristallographique si l'on peut trouver un groupe cristallographique  $\Phi$  tel que  $\overline{\eta}_{\Phi}(K) = 1$  autrement dit si l'on peut trouver  $\Sigma \approx \Phi$  tel que  $(K, \Sigma)$  est un pavement de  $\mathbb{R}^2$ . Dans ce cas, de ce pavement on déduit naturellement un pavement de  $\mathbb{R}^2$  à l'aide du polygone  $P$  sur lequel  $K$  est construit. On dit que  $K$  est strictement cristallographique, si  $\Sigma$  peut être choisi de façon que ce dernier pavement soit mosaïcal. Cela implique évidemment que  $P$  est un polygone mosaïcal.

Quand  $P$  est régulier, c'est nécessairement un triangle équilatéral, un carré ou un hexagone régulier. Les animaux correspondants sont appelés respectivement polyamonds, polyminos et polyhexes ( $k$ -iamonds,  $k$ -minos,  $k$ -hexes pour les  $k$ -animaux).

Notons qu'un animal peut être mosaïcal sans être pavant. C'est le cas par exemple de l'heptiamond 43 ci-contre



(on trouve une preuve que cet heptiamond ne pave pas  $\mathbb{R}^2$  dans [8] ; c'est d'ailleurs le seul heptiamond qui ne soit pas cristallographique (cf. [2])). Dans la suite un animal plan sera toujours un polyamond, un polymino ou un polyhexe.

Si  $K_1$  et  $K_2$  sont deux tels animaux, on dit qu'ils sont "égaux" s'ils sont dans une même classe vis à vis du groupe des similitudes de  $\mathbb{R}^2$ . Et quand on parle par exemple du nombre 12 de pentaminos, il s'agit du nombre de classes modulo la relation d'équivalence définie par ce groupe. (On peut aussi si l'on veut considérer les classes modulo le groupe des similitudes directes ; alors par exemple en ce sens il y a 18 pentaminos).

On dit qu'un animal est multiplement connexe s'il contient au moins un trou.

Signalons les résultats suivants concernant le nombre de  $k$ -animaux.

On s'est servi notamment du texte de Klarner [17].

$t_k, c_k, h_k$  désignent respectivement le nombre de  $k$ -iamonds, de  $k$ -ominos et de  $k$ -hexes ;  $t_k^{**}, c_k^{**}, h_k^{**}$  désignant le nombre d'entre eux qui sont multiplement connexes. On obtient alors la table I.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_k$	1	1	1	3	4	12	24	66	160			
$t_k^{**}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
$c_k$	1	1	2	5	12	35	108	369	1285	4655	17073	63600
$c_k^{**}$	0	0	0	0	0	0	1	6	37	384	?	?
$h_k$	1	1	3	7	22	83						
$h_k^{**}$	0	0	0	0	0	1						

Table I

• De plus on sait que pour  $k$  suffisamment grand on a :

$$t_k > (2, 13)^k, \quad c_k > (3, 72)^k, \quad h_k > 4^k$$

$$\text{et que } \lim_{k \rightarrow +\infty} (t_k)^{1/k} = \alpha \text{ existe avec } \alpha \leq 27/4. \quad (**)$$

Je ne connais pas d'autres résultats. Notons que la détermination de  $c_k$  a été faite notamment par Read [18] qui s'est trompé pour  $c_{10}$ , erreur qu'il a ensuite corrigé mais qui a été reproduite dans le livre [9] de Golomb.

Les possibilités de pavement de certaines régions du plan par des polyminos ont été étudiées par Golomb dans [10] pour un seul polymino et dans [11] pour un ensemble fini de polyminos. Dans ce même article, Golomb cite des résultats analogues concernant les polyamonds dus à Ikeno. Je ne

(\*) D'après [23] on a  $c_{13} = 233591, c_{14} = 901471, c_{15} = 3426576$  et  $c_{16} = 13079255$   
 (\*\*) D'après [24]  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (c_k)^{1/k} = \theta$  existe avec  $\theta < 4,65$ .

sais pas si l'on connaît les possibilités de pavement des polyhexes.

Donnons ici quelques indications provenant en gros de [9].

Les 12 pentaminos distincts pris ensemble ont une mesure de 60. Etant donné un 60-mino, peut-on le paver à l'aide de ces 12 pentaminos ? De même les 35 hexaminos pris ensemble peuvent-ils paver un 210-mino donné ?

On peut parfois répondre négativement de façon immédiate à des questions analogues par les considérations suivantes.

Considérons les carrés d'un polymino  $A$  colorés comme dans un échiquier (on emploie deux couleurs) de façon que deux carrés adjacents par un côté soient de couleur différente et appelons jeu du polymino la valeur absolue de la différence entre le nombre de carrés colorés d'une couleur et le nombre de carrés colorés de l'autre. Si  $A$  et  $B$  sont deux polyminos d'intérieurs disjoints, on a  $\text{jeu}(A \cup B) = \begin{cases} \text{jeu } A + \text{jeu } B \\ \text{ou} \\ |\text{jeu } A - \text{jeu } B| \end{cases}$

On voit qu'il y a 24 hexaminos de jeu 0 et 11 hexaminos de jeu 2.

Il en résulte qu'un 210-omino formé de 35 hexaminos a un jeu qui peut être 2, 6, 10, 14, 18 ou 22 ( $\leq 22$  et congru à 2 mod 4).

Par exemple un rectangle de surface 210 ( $3 \times 70, 5 \times 42, 6 \times 35, 7 \times 30, 10 \times 21$  ou  $14 \times 15$ ) ne peut être pavé par les 35 hexaminos puisqu'un rectangle a pour jeu 0.

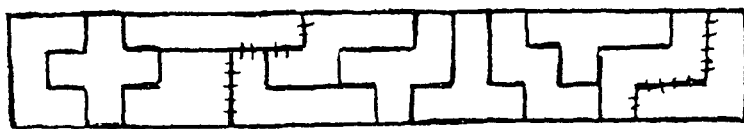
Par contre, parmi les 12 pentaminos il y en a 11 de jeu 1 et 1 de jeu 3, de sorte que le jeu  $j$  d'un 60-mino formé par ces pentaminos est  $j = 1 + 2k + 3$  ( $0 \leq k \leq 5, j \geq 0$ ) soit 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2 ou 0.

Cela n'exclut pas le fait que ce 60-mino puisse être un rectangle de jeu 0. En fait, on peut former avec les 12 pentaminos les rectangles  $6 \times 10, 5 \times 12, 4 \times 15$  et  $3 \times 20$ .

Trouver une solution d'un de ces problèmes constitue un puzzle et par exemple on peut trouver dans le commerce un rectangle  $6 \times 10$  couvert par les 12 pentaminos distincts.

Deux solutions d'un de ces problèmes sont considérés comme "identiques" si l'on passe de l'une à l'autre par une isométrie.

On a utilisé des computers pour trouver le nombre de solutions distinctes. Je sais par exemple que le rectangle  $6 \times 10$  peut être couvert par les 12 pentaminos de 2.339 façons essentiellement différentes et que le rectangle  $3 \times 20$  peut être couvert exactement de deux façons distinctes représentées dans la figure 3.



( la partie centrale limitée par ++++ possède un centre de symétrie )

Figure 3

On peut utiliser la notion de jeu pour les polyamonds en utilisant le pavement du plan par des triangles équilatéraux colorés à l'aide de deux couleurs de façon que deux triangles équilatéraux ayant un côté commun sont de couleurs distinctes.

Par exemple , des 12 hexiamonds, 10 ont pour jeu 0 et les 2 autres pour jeu 2. Un polyamond formé à l'aide de ces 12 hexiamonds répétés au plus une fois a donc un jeu égal à 0, 2 ou 4.

On en déduit immédiatement par exemple l'impossibilité de paver un triangle équilatéral de côté 6 considéré comme un 36-iamond de jeu 6 à l'aide de 6 hexiamonds distincts.

Je ne sais pas si en utilisant le coloriage du pavement régulier hexagonal du plan à l'aide de 3 couleurs tel que 2 hexagones ayant un côté commun soient de couleurs différentes , il est possible d'écarter certaines configurations formées par des polyhexes.

#### 4. Les compacts de Jordan cristallographiques directs.

Dans ce paragraphe  $K$  est un compact de Jordan (compact  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\text{fr} K$  est une courbe de Jordan ;  $\overset{\circ}{K}$  est alors simplement connexe).

Soit  $\Phi$  un groupe d'isométries directes ( $\Phi$  est  $p_1, p_2, p_3, p_4$  ou  $p_6$ ) ; on dit que  $K$  est cristallographique direct par rapport à  $\Phi$  (on dit cristallographique direct quand  $\Phi$  n'est pas précisé) lorsqu'on a  $\overline{\eta}_{\Phi}(K) = 1$ .

On caractérise les  $K$  cristallographiques directs par rapport à  $\Phi$  pour chacun des  $\Phi$  possibles par des propriétés portant sur  $\text{fr} K$ .

Les résultats s'appliquent évidemment aux animaux plans simplement connexes.

Ces résultats résultent de l'étude de Heesch et Kienzle faite dans [13] et aussi de l'étude de Delone dans [5]. On peut aussi se servir des résultats établis dans [1] pour  $\Phi = p_1$ , d'où peuvent se déduire les résultats, au moins pour  $\Phi = p_2$  (cf. [2]).

Si un polygone d'au moins 3 côtés a ses sommets sur  $\text{fr} K$  on cite ses sommets dans l'ordre de l'orientation induite sur  $\text{fr} K$  par une orientation de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\alpha, \beta$  sont deux sommets d'un tel polygone, ils sont consécutifs s'ils sont consécutifs vis à vis de l'ordre précédent.

Par l'arc  $\alpha\beta$  noté  $\widehat{\alpha\beta}$  on désigne alors la partie de  $\text{fr} K$  ayant pour extrémité  $\alpha$  et  $\beta$  et ne contenant aucun autre sommet du polygone.

Dans la suite, les points  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \epsilon$  sont toujours supposés être sur  $\text{fr} K$ ,  $\widehat{\alpha\beta} \# \widehat{\delta\gamma}$  veut dire que  $\widehat{\alpha\beta}$  se déduit par translation de  $\widehat{\delta\gamma}$  et  $\widehat{\alpha\beta}(\ast)$  que  $\widehat{\alpha\beta}$  admet un centre de symétrie (qui évidemment est le milieu du segment  $\alpha\beta$ ).

#### $K$ est cristallographique

(a) pour  $p_1$       ssi

(a<sub>1</sub>) on peut trouver un hexagone centré  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$  tel que  
 $\widehat{\alpha\beta} \# \widehat{\epsilon\delta}$ ,  $\widehat{\beta\gamma} \# \widehat{\zeta\epsilon}$ ,  $\widehat{\gamma\delta} \# \widehat{\alpha\zeta}$

ou

(a<sub>2</sub>) on peut trouver un parallélogramme  $\alpha\beta\delta\epsilon$  tel que  
 $\widehat{\alpha\beta} \# \widehat{\epsilon\delta}$ ,  $\widehat{\beta\delta} \# \widehat{\alpha\epsilon}$

( (a<sub>2</sub>) apparait comme le cas particulier de (a<sub>1</sub>) correspondant à  $\delta = \gamma$ ,  
 ((d'où  $\zeta = \alpha$ ))

(b) pour p2 ssi

(b<sub>1</sub>) on peut trouver un hexagone  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$  tel que  
 $\widehat{\alpha\beta} \# \widehat{\epsilon\delta}$ ,  $\widehat{\beta\gamma}(\ast)$ ,  $\widehat{\gamma\delta}(\ast)$ ,  $\widehat{\epsilon\zeta}(\ast)$ ,  $\widehat{\zeta\alpha}(\ast)$

ou

(b<sub>2</sub>) on peut trouver un pentagone  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$  tel que  
 $\widehat{\alpha\beta} \# \widehat{\epsilon\delta}$ ,  $\widehat{\beta\gamma}(\ast)$ ,  $\widehat{\gamma\delta}(\ast)$ ,  $\widehat{\epsilon\alpha}(\ast)$

(cas particulier de (b<sub>1</sub>) correspondant à  $\zeta = \alpha$ )

ou

(b<sub>3</sub>) on peut trouver un quadrilatère  $\alpha\beta\gamma\epsilon$  tel que  
 $\widehat{\alpha\beta} \# \widehat{\epsilon\gamma}$ ,  $\widehat{\beta\gamma}(\ast)$ ,  $\widehat{\epsilon\alpha}(\ast)$

(cas particulier de (b<sub>2</sub>) correspondant à  $\gamma = \delta$ )

ou

(b<sub>4</sub>) on peut trouver un quadrilatère  $\beta\gamma\delta\zeta$  avec  
 $\widehat{\beta\gamma}(\ast)$ ,  $\widehat{\gamma\delta}(\ast)$ ,  $\widehat{\delta\zeta}(\ast)$ ,  $\widehat{\zeta\beta}(\ast)$

(cas particulier de (b<sub>1</sub>) correspondant à  $\alpha = \beta$  et  $\delta = \epsilon$ )

ou

(b<sub>5</sub>) on peut trouver un triangle  $\alpha\gamma\delta$  avec  
 $\widehat{\alpha\gamma}(\ast)$ ,  $\widehat{\gamma\delta}(\ast)$ ,  $\widehat{\delta\alpha}(\ast)$

(cas particulier de (b<sub>1</sub>) correspondant à  $\zeta = \alpha = \beta$  et  $\delta = \epsilon$  et aussi cas particulier de (b<sub>4</sub>)).

(c) pour p3 ssi

(c<sub>1</sub>) on peut trouver un hexagone  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$  tel que des rotations d'angle égal valant  $\pm 2\pi/3$  de centres respectifs  $\beta, \delta, \zeta$  transforment respectivement  $\widehat{\beta\alpha}$  en  $\widehat{\beta\gamma}$ ,  $\widehat{\delta\gamma}$  en  $\widehat{\delta\epsilon}$  et  $\widehat{\zeta\epsilon}$  en  $\widehat{\zeta\alpha}$  (le triangle  $\beta\delta\zeta$  est alors équilatéral).

ou

(c<sub>2</sub>) on peut trouver un losange  $\alpha\beta\gamma\delta$  union de deux triangles équilatéraux ayant  $\beta\delta$  comme côté commun tel que des rotations d'angle égal valant  $\pm 2\pi/3$  transforment  $\widehat{\beta\alpha}$  en  $\widehat{\beta\gamma}$  et  $\widehat{\delta\gamma}$  en  $\widehat{\delta\alpha}$  (cas particulier de (c<sub>1</sub>) correspondant au cas  $\zeta = \epsilon = \alpha$ )

(d) pour p4 ssi

(d<sub>1</sub>) on peut trouver un pentagone  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$  tel que des rotations d'angle égal valant  $\pm \pi/2$  de centres respectifs  $\beta$  et  $\epsilon$  transforment  $\widehat{\beta\alpha}$  en  $\widehat{\beta\gamma}$  et  $\widehat{\epsilon\delta}$  en  $\widehat{\epsilon\alpha}$  et que  $\widehat{\gamma\delta}(\ast)$

ou

(d<sub>2</sub>) on peut trouver un carré  $\alpha\beta\gamma\epsilon$  tels que des rotations de centres respectifs  $\beta$  et  $\epsilon$  d'angle égal valant  $\pm \pi/2$  transforment  $\widehat{\beta\alpha}$  en  $\widehat{\beta\gamma}$  et  $\widehat{\epsilon\delta}$  en  $\widehat{\epsilon\alpha}$  (cas particulier de (d<sub>1</sub>) correspondant à  $\gamma = \delta$ )

ou

(d<sub>3</sub>) on peut trouver un triangle  $\alpha\delta\epsilon$  rectangle en  $\epsilon$  tel qu'une rotation de centre  $\epsilon$  d'angle  $\pm \pi/2$  transforme  $\widehat{\epsilon\delta}$  en  $\widehat{\epsilon\alpha}$  et que  $\widehat{\alpha\delta}(\ast)$ .

(e) pour p6 ssi

(e<sub>1</sub>) on peut trouver un pentagone  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$  tel qu'une rotation de centre  $\beta$  d'angle  $\varphi = \pm \pi/3$  transforme  $\widehat{\beta\alpha}$  en  $\widehat{\beta\gamma}$ , qu'une rotation de centre  $\delta$  d'angle  $2\varphi$  transforme  $\widehat{\delta\gamma}$  en  $\widehat{\delta\epsilon}$  et que  $\widehat{\epsilon\alpha}(\ast)$ .

ou



( $e_2$ ) on peut trouver un quadrilatère  $\alpha\beta\gamma\delta$  d'angles massifs  $\pi/2, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$  tel qu'une rotation de centre  $\beta$  d'angle  $\pi/3$  transforme  $\beta\alpha$  en  $\beta\gamma$  et qu'une rotation de centre  $\delta$  d'angle  $2\pi/3$  transforme  $\delta\gamma$  en  $\delta\epsilon$  (cas particulier de ( $e_1$ ) correspondant à  $\epsilon = \alpha$ ).

( $e_3$ ) on peut trouver un triangle équilatéral  $\alpha\beta\gamma$  tel qu'une rotation de centre  $\beta$  d'angle  $\pi/3$  transforme  $\widehat{\beta\alpha}$  en  $\widehat{\beta\gamma}$  et que  $\widehat{\alpha\gamma}(\ast)$ .

(cas particulier de ( $e_1$ ) correspondant à  $\gamma = \delta = \epsilon$ )

ou

( $e_4$ ) on peut trouver un triangle  $\alpha\delta\epsilon$  d'angle  $\pi/6, 2\pi/3, \pi/6$  tel qu'une rotation d'angle  $2\pi/3$  de centre  $\delta$  transforme  $\widehat{\delta\alpha}$  en  $\widehat{\delta\epsilon}$  et que  $\widehat{\epsilon\alpha}(\ast)$  (cas particulier de ( $e_1$ ) correspondant à  $\alpha = \beta = \gamma$ ).

Notons qu'on a obtenu 2 cas pour (p1), 5 cas pour (p2), 2 cas pour (p3), 3 cas pour (p4) et 4 cas pour (p6).

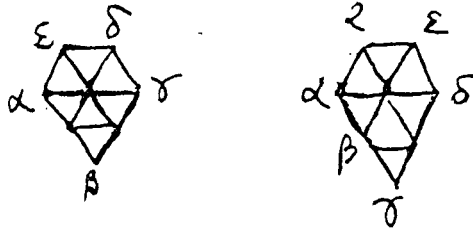
Page 15 bis, la fig. 4 donne un exemple tiré de [13] pour chacun des 16 cas possibles.

Dans un quelconque de ces exemples  $\bigcirc$  indique que le point marqué  $\bigcirc$  est un centre de symétrie pour l'arc qui le porte et aussi pour le pavement correspondant ; deux parties sont marquées de flèches  $\rightarrow$  parallèles si elles peuvent se déduire l'une de l'autre par translation.

Notons aussi qu'un polymino ne peut être des "types" ( $c_1$ ), ( $c_2$ ), ( $e_1$ ), ( $e_2$ ), ( $e_3$ ). En effet sinon le pavement possède des centres de rotation d'ordre 3 et un élément du pavement possède au moins deux côtés formant un angle de  $2\pi/3$  ce qui est exclu pour un polymino.

De façon analogue, un polyamond ne peut être des types ( $d_1$ ), ( $d_2$ ), ( $d_3$ ) qui font intervenir p4, ni un polyhexe des types ( $d_1$ ), ( $d_2$ ), ( $d_3$ ) faisant intervenir p4 ou des types ( $e_1$ ), ( $e_2$ ), ( $e_3$ ), ( $e_4$ ) faisant p6. (Cela avait déjà été noté dans [2]).

Notons encore qu'un compact de Jordan  $K$  peut vérifier simultanément plusieurs des critères. Par exemple pour l'heptamino  $K=40$  (cf. [2]) les 2 figures suivantes



montrent respectivement que les critères  $(e_1)$  et  $(b_1)$  sont vérifiés pour  $K$  et on a

$\bar{\eta}_{p6}(K) = \bar{\eta}_{p2}(K) = 1$  (par contre  $\bar{\eta}_{p3}(K) \neq 1$  et  $\eta(K) = 14/15$  d'après [2]).

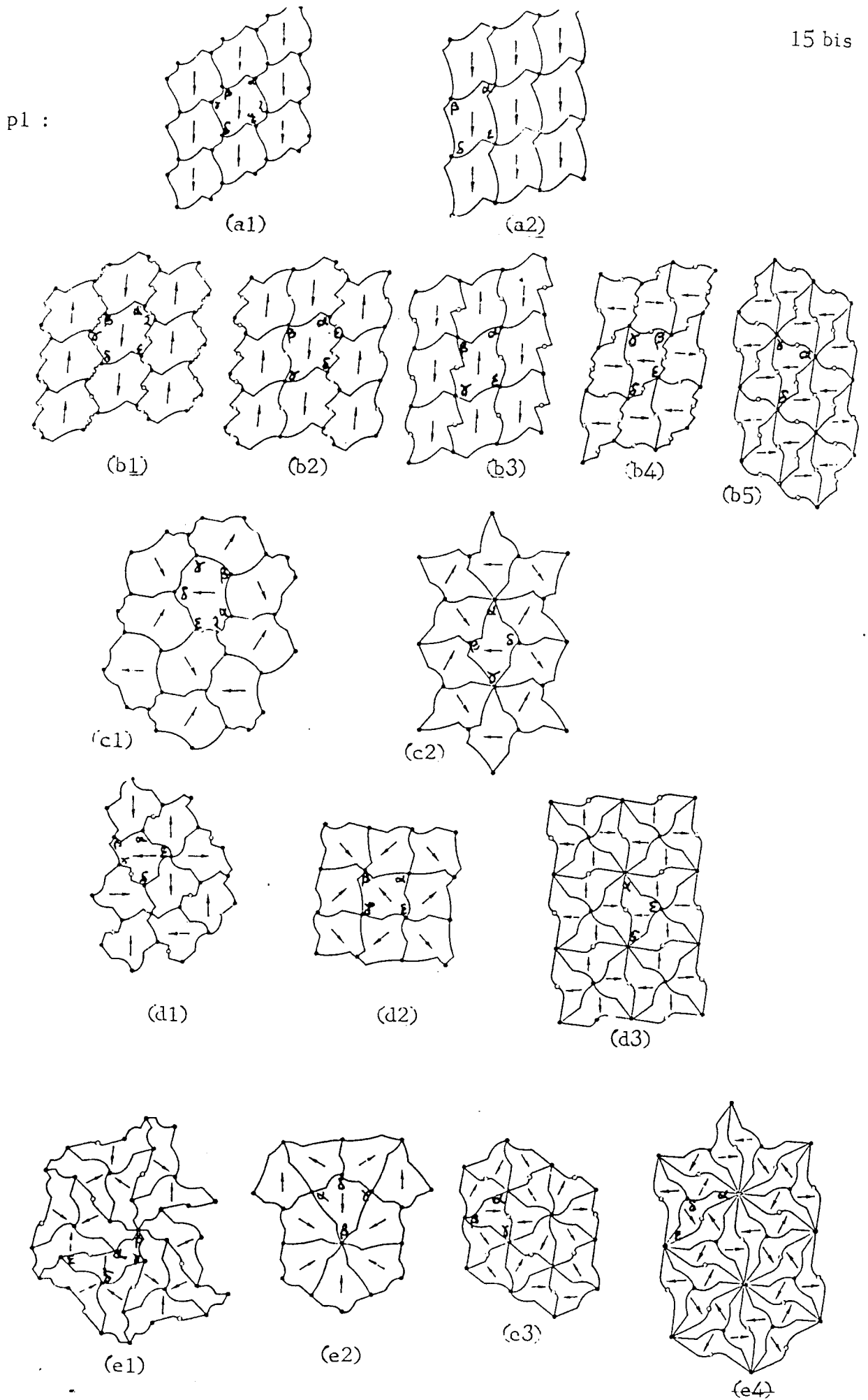


Figure 4

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.Bantegnie : Sur quelques points de Géométrie des Nombres,  
Thèse Sc. Math. Lille 1967 (multigraphié).
- [2] R.Bantegnie : Etalements cristallographiques,  
Acta. Math. Acad. Sc. Hungaricae (à paraitre).
- [3] B.Bollobas : Filling the plane with congruent convex hexagons  
without overlapping,  
Ann. Univ. Sc. Budapest Math. (1963), 117-123.
- [4] H.S.M.Coxeter  
W.O.J.Moser : Generators and relations for discrete groups,  
Springer Verlag, Berlin 1957.
- [5] B.N.Delone : Teoriya Planigonov,  
Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. 23 (1959),  
365-386.
- [6] L.Fejes Toth : Lagerungen in der Ebene, der Kugel und im Raum,  
Springer Verlag, Berlin, 1972 (2°ed).
- [7] L.Fejes Toth : Regular Figures,  
Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [8] M.Gardner : Sixth Book of Mathematical Games from Scientific  
American,  
W.H. Freeman and C°, San Francisco 1975.
- [9] S.W.Golomb : Polyominoes,  
Scribner's, New York, 1965.
- [10] S.W.Golomb : Tiling with Polyominoes,  
J. of Comb. Th.1 (1966), 280-296.
- [11] S.W.Golomb : Tiling with sets of Polyominoes,  
J. of Comb. Th.9 (1970), 61-71.
- [12] B.Grünbaum  
G.C.Shephard : Isohedrals tilings by convex pentagons,  
(à paraitre).

.../...

- [13] H. Heesch  
O. Kienzle : Flachenschluss,  
Springer Verlag, Berlin 1963.
- [14] N.F.M. Henry  
K. Lonsdale : International Tables for X-Ray Crystallography,  
Vol I, Kynoch Press, Birmingham 1952.
- [15] R. James : Pavement pentagonal signalé par Martin Gardner,  
Scientific American, Math. Games 233 (Dec 1975),  
117-118.
- [16] R.B. Kerschner : On paving the plane,  
Am. Math. Month. 75 (1968), 839-844.
- [17] D.A. Klarner : Cell growth problems,  
Can. J. Math. 19 (1967), 851-863.
- [18] R.C. Read : Contributions to the cell growth problem,  
Can. J. Math. 12 (1962), 1-20.
- [19] M. Rice : Pavements pentagonaux signalés à Martin Gardner,  
(non publié).
- [20] D. Schattschneider : The plane symmetry groups : their recognition  
and notation,  
(à paraître).
- [21] D. Schattschneider : Pentagonal tilings of Richard James' type,  
(non publié).
- [22] D. Schattschneider : Tiling the plane with congruent Pentagons,  
(à paraître dans Math. Mag. 1977).

*Des references supplementaires sont*

- [23] W.W Rouse Ball, H.S.M Coxeter : Mathematical recreations and essays  
12<sup>ed</sup> University of Toronto Press 1974 (cf p 109-113)
- [24] D.A Klarner, Rivest : A procedure for improving the upper bound  
for the number of  $n$ -ominoes  
Canadian J. Math, 25 (1973), 585-602