THÉORIE DES NOMBRES
BESANÇON

Années 1996/97-1997/98

Calcul des classes de Stiefel-Whitney des formes de Pfister

G. BERHUY

Calcul des classes de Stiefel-Whitney des formes de Pfister

Grégory Berhuy

Introduction: Le but de ce qui suit est de calculer les classes de Stiefel-Whitney des formes de Pfister. On en déduira alors celles de la forme trace d'un produit d'algèbres de quaternions, muni d'un produit tensoriel d'involutions de première espèce.

Rappels et notations: Soit k un corps de caractéristique différente de 2. On note $H^m(k)$ les groupes de cohomologie $H^m(Gal(k_{sep}/k), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Si $a \in k^*$, on note (a) l'élément de $H^1(k)$ correspondant. Il est bien connu que $H^1(k)$ s'identifie à k^*/k^{*2}, et que $H^2(k)$ s'identifie au noyau de la multiplication par 2 dans le groupe de Brauer de k. On rappelle que $(a)+(b)=(ab)$, pour $a, b \in k^*$. Si $x \in H^m(k)$ et $y \in H^n(k)$, on note $x.y$ leur cup-produit. Le cup-produit $(a).(b)$ correspond à l'algèbre de quaternions (a,b) sur k. En particulier, on a les relations suivantes, déduites des propriétés des algèbres de quaternions: $(a).(a)=(a).(-1)$, $(1).(a)=0$, et $(a).(-a)=0$. Etant donné que l'on travaille modulo 2, le cup-produit induit sur $H^*(k)=\bigoplus\limits_{m\geq 0} H^m(k)$ une structure d'anneau *commutatif.* Soit q une forme quadratique non-dégénérée de rang n sur k. Si $q \simeq <a_1, \cdots, a_n>$, et si $r \geq 0$, on définit *la r-ième classe de Stiefel-Whitney de q* par $w_r(q)=\sum\limits_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n}(a_{i_1})\cdots(a_{i_r})$. C'est un élément de $H^r(k)$, qui ne dépend pas de la diagonalisation de q choisie (cf [1]). On a en particulier $w_0(q)=1$, $w_1(q)=(\det q)$. Quant à $w_2(q)$, c'est l'invariant de Hasse-Witt de q. Remarquons que si $m>n$, on a $w_m(q)=0$. On définit enfin l'élément de $H^*(k)$, appelé *classe totale de Stiefel-Whitney de q*, $w(q)=\sum\limits_{m\geq 0} w_m(q)$. Si q' est une autre forme quadratique non-dégénérée sur k, on a $w(q\perp q')=w(q).w(q')$ (cf [1]), c'est-à-dire $w_m(q\perp q')=\sum\limits_{j=0}^{m} w_j(q).w_{m-j}(q')$, pour tout $m\geq 0$.
Si $a_1, \cdots, a_m \in k^*$, $<<a_1, \cdots, a_m>>$ désigne la forme quadratique $\bigotimes\limits_{i=1}^{m} <1, a_i>$, appelée une *m-forme de Pfister.* Si $m \geq 1$ est un entier, mq

désigne la somme orthogonale de m copies de q.
Si A est une algèbre centrale simple sur k, on note Trd_A la trace réduite de A. On rappelle qu'une involution σ sur A est de première espèce si sa restriction à k est l'identité. La forme $(x,y) \in A \times A \mapsto \mathrm{Trd}_A(\sigma(x)y)$ est une forme quadratique sur k, que l'on note $\mathcal{T}_\sigma$. Pour tout ce qui concerne les algèbres centrales simples, on pourra consulter [4], et plus précisément [2] pour les algèbres à involution.

1.Effet de la multiplication par un scalaire sur les classes de Stiefel-Whitney

Lemme 1.1: Soit A un anneau commutatif, et soient $X_1, \cdots, X_n$ n indéterminées indépendantes. Pour $0 \leq m \leq n$, on note σ_m le m-ième polynôme symétrique élémentaire de $A[X_1, \cdots, X_n]$. Alors pour tout $\lambda \in A$, on a $\sigma_m(X_1+\lambda, \cdots, X_n+\lambda) = \sum_{j=0}^{m} C_{n-m+j}^{j} \lambda^j \sigma_{m-j}$.

Preuve: Soit T une autre indéterminée. On a alors $\prod_{l=1}^{n}(T+X_l) = \sum_{j=0}^{n} T^j \sigma_j$.
On a donc $\prod_{l=1}^{n}(T+\lambda+X_l) = \sum_{j=0}^{n} T^j \sigma_j(X_1+\lambda, \cdots, X_n+\lambda) = \sum_{j=0}^{n}(T+\lambda)^j \sigma_j$
$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} C_j^i \lambda^{j-i} T^i \sigma_j = \sum_{i=0}^{n} T^i \sum_{j=i}^{n} C_j^i \lambda^{j-i} \sigma_j = \sum_{i=0}^{n} T^{n-i} \sum_{j=n-i}^{n} C_j^{n-i} \lambda^{j-n+i} \sigma_{n-j}$
$= \sum_{i=0}^{n} T^{n-i} \sum_{j=0}^{i} C_{j+n-i}^{n-i} \lambda^j \sigma_{j-i} = \sum_{i=0}^{n} T^{n-i} \sum_{j=0}^{i} C_{j+n-i}^{j} \lambda^j \sigma_{j-i}$
On a alors le résultat annoncé par identification.

Proposition 1.1: Soit q une forme quadratique non-dégénérée de rang n sur k, et soit $\lambda \in k^*$. Pour $0 \leq m \leq n$, on a $w_m(<\lambda> \otimes q) = \sum_{j=0}^{m} C_{n-m+j}^{j} (\lambda)^j . w_{m-j}(q)$.

Preuve: On remarque que si $q \simeq <a_1, \cdots, a_n>$,
on a $w_m(q) = \sigma_m((a_1), \cdots, (a_n))$, et en tenant compte de l'égalité $(\lambda a_i) = (\lambda) + (a_i)$, il vient $w_m(<\lambda> \otimes q) = \sigma((\lambda)+(a_1), \cdots, (\lambda)+(a_n))$. On obtient alors le résultat en appliquant le lemme 1 avec l'anneau commutatif $A = H^*(k)$, et en spécialisant convenablement.

2.Classes de Stiefel-Whitney des formes de Pfister et produit d'algèbres de quaternions

On détermine dans ce paragraphe les classes de Stiefel-Whitney des formes de Pfister, ainsi que celles de la forme trace d'un produit d'algèbres de quaternions muni d'un produit tensoriel d'involutions de première espèce.

Si $a_1, \cdots, a_m \in k^*$, on note q_m la m-forme de Pfister $<< a_1, \cdots, a_m >>$.

Proposition 2.1: Si $r \geq 1, r \neq 2^{m-1}$, on a $w_r(q_m) = 0$.

On aura besoin du lemme suivant:

Lemme 2.1: Si $m \geq 1$, et si $0 < r < 2^m$, on a $C^r_{2^m} \equiv 0[2]$.

Preuve du lemme 2.1: Il suffit de montrer que $(1+X)^{2^m} \equiv 1 + X^{2^m}$ mod $2\mathbb{Z}[X]$. Or, ceci est clair pour $m = 1$ et le cas général se traite par une récurrence immédiate.

Preuve de la proposition 2.1:

• On traite d'abord les cas $m = 1$ et $m = 2$. On a $w_r(q_1) = 0$ si $r > 2$ car q_1 est de rang 2, et $w_2(q_1) = (1)(a_1) = 0$. D'autre part, $w_1(q_2) = (\det q_2) = 0$, $w_3(q_2) = (1)(a_1)(a_2) + (1)(a_1)(a_1a_2) + (1)(a_2)(a_1a_2) + (a_1)(a_2)(a_1a_2) = (a_1)(a_2)((-a_1) + (-a_2)) = (a_1)(-a_1)(a_2) + (a_1)(a_2)(-a_2) = 0$, et $w_4(q_2) = (1)(a_1)(a_2)(a_1a_2) = 0$. Le résultat est donc vrai si $m = 1$ et $m = 2$.

• On procède par récurrence sur m. D'après le point précédent, la proposition est vraie pour $m = 2$. Supposons qu'elle est vraie pour $m \geq 2$. On a $q_{m+1} = q_m \perp < a_{m+1} > \otimes q_m$, et donc $w_r(q_{m+1}) = \sum\limits_{j=0}^{r} w_j(q_m) w_{r-j}(< a_{m+1} > \otimes q_m)$. On traite plusieurs cas séparément.

1. $1 \leq r < 2^{m-1}$
   L'hypothèse de récurrence entraîne alors $w_r(q_{m+1}) = w_r(< a_{m+1} > \otimes q_m)$ $= \sum\limits_{j=0}^{r} C^j_{2^m - r + j}(a_{m+1})^j . w_{r-j}(q_m) = C^r_{2^m}(a_{m+1})^r = 0$, d'après le lemme 3.1.

2. $r = 2^{m-1}$
   On a dans ce cas $w_{2^{m-1}}(q_{m+1}) = w_{2^{m-1}}(q_m) + w_{2^{m-1}}(< a_{m+1} \otimes q_m >) = w_{2^{m-1}}(q_m) + \sum\limits_{j=0}^{2^{m-1}} C^j_{2^m - 2^{m-1} + j}(a_{m+1})^j w_{2^{m-1}-j}(q_m) = w_{2^{m-1}}(q_m) + w_{2^{m-1}}(q_m) + C^{2^{m-1}}_{2^m}(a_{m+1})^{2^{m-1}} = 0$, car on travaille modulo 2.

3. $2^{m-1} < r < 2^m$
   Ici on a $w_r(q_{m+1}) = w_r(q_m) + w_r(< a_{m+1} > \otimes q_m) + w_{2^{m-1}}(q_m).w_{r-2^{m-1}}(<$

$a_{m+1} >\otimes q_m)$. Par hypothèse, on a $w_r(q_m) = 0$. D'autre part, $0 < r - 2^{m-1} < 2^{m-1}$. D'après le calcul effectué dans le premier cas, on a alors $w_{r-2^{m-1}}(< a_{m+1}\otimes q_m) = 0$. De plus, $w_r(< a_{m+1}\otimes q_m) = C^r_{2^m}(a_{m+1})^r + C^{r-2^{m-1}}_{2^{m-1}}(a_{m+1})^{r-2^{m-1}}.w_{2^{m-1}}(q_m) = 0$ d'après le lemme 2. On a donc $w_r(q_{m+1}) = 0$.

4. $2^m < r < 2^{m+1}$ On a $w_r(q_{m+1}) = w_r(q_m) + w_r(< a_{m+1} >\otimes q_m) + w_{2^{m-1}}(q_m).w_{r-2^{m-1}}(< a_{m+1} >\otimes q_m)$. Par hypoyhèse, on a $w_r(q_m) = 0$, et on montre comme précédemment que $w_r(< a_{m+1}\otimes q_m >) = 0$. Enfin, $w_{r-2^{m-1}}(< a_{m+1} >\otimes q_m) = \sum_{j=0}^{r-2^{m-1}} C^j_{2^m-(r-2^{m-1})+j}(a_{m+1})^j w_{r-2^{m-1}-j}(q_m) = C^r_{2^m}(a_{m+1})^{r-2^{m-1}} + C^{r-2^m}_{2^{m-1}} w_{2^{m-1}}(q_m) = 0$, et donc $w_r(q_{m+1}) = 0$.

Finalement, la proposition est vraie au rang $m+1$, ce qui achève la récurrence.

Proposition 2.2: Pour $m \geq 1$, on a
$w_{2^{m-1}}(q_m) = \sum_{j=1}^{m}(a_j)(-a_{j+1})(-a_{j+2})\cdots(-a_m)(-1)^{2^{m-1}-m+j-1}$.

Preuve: On a $w_1(q_1) = (a_1)$ et $w_{2^m}(q_{m+1}) = \sum_{j=0}^{2^m} w_j(q_m)w_{2^m-j}(< a_{m+1} >\otimes q_m)$ $= w_{2^{m-1}}(q_m)w_{2^{m-1}}(< a_{m+1} >\otimes q_m) + w_{2^m}(< a_{m+1} >\otimes q_m)$ grâce à la proposition précédente. On obtient par le même argument $w_{2^m}(< a_{m+1} >\otimes q_m) = (a_{m+1})^{2^m} + w_{2^{m-1}}(q_m).(a_{m+1})^{2^{m-1}}$ et $w_{2^{m-1}}(< a_{m+1} >\otimes q_m) = w_{2^{m-1}}(q_m)$. On a donc $w_{2^m}(q_{m+1}) \doteq w_{2^{m-1}}(q_m)^2 + (a_{m+1})^{2^m} + (a_{m+1})^{2^{m-1}}(q_m)$ pour tout $m \geq 1$. Une récurrence immédiate nous montre que $(\lambda)^{2^m} = (\lambda)(-1)^{2^m-1}$ pour $\lambda \in k^*$. D'autre part, on voit facilement, en tenant compte que l'on travaille modulo 2 et en utilisant le fait que $(a)(a) = (-1)(a)$, que
$w_{2^{m-1}}(q_m)^2 = (-1)^{2^{m-1}}.w_{2^{m-1}}(q_m)$.
On a donc $w_{2^m}(q_{m+1}) = [(-1)^{2^{m-1}-1}.(a_{m+1}) + (-1)^{2^{m-1}}].w_{2^{m-1}}(q_m)$ $+(-1)^{2^m-1}(a_{m+1}) = (-1)^{2^{m-1}-1}.[(a_{m+1})+(-1)].w_{2^{m-1}}(q_m)+(-1)^{2^m-1}(a_{m+1})$. On a alors $w_{2^m}(q_{m+1}) = (-1)^{2^{m-1}-1}(-a_{m+1}).w_{2^{m-1}}(q_m) + (-1)^{2^m-1}(a_{m+1})$. On en déduit alors la proposition par une récurrence immédiate.

On suppose maintenant que A est un produit d'algèbres de quaternions. A est donc en particulier une algèbre à involution. On a alors le résultat suivant:

Théorème 2.1: Soient $Q_1, \cdots, Q_m$ des algèbres de quaternions, munies respectivement d'involutions de première espèce $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$. On pose $A = Q_1 \otimes \cdots \otimes Q_m$ et $\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \sigma_m$. Alors il existe $a_1, \cdots, a_{2m} \in k^*$ tels que $T_\sigma \simeq < 2^m >\otimes << a_1, \cdots, a_{2m} >>$. En particulier,
$w(T_\sigma) = 1 + \sum_{j=1}^{2m}(a_j)(-a_{j+1})(-a_{j+2})\cdots(-a_{2m})(-1)^{2^{2m-1}-2m+j-1}$.

Preuve: Il est bien connu que si (A_1, σ_1) et (A_2, σ_2) sont deux algèbres centrales simples sur k, dont les involutions sont de même espèce, alors $\mathcal{T}_{\sigma_1 \otimes \sigma_2} \simeq \mathcal{T}_{\sigma_1} \otimes \mathcal{T}_{\sigma_2}$. Si σ_i est symplectique, on sait alors que c'est l'involution canonique de Q_i. Si on a $Q_i = (\alpha, \beta)$, alors on en déduit aisément $\mathcal{T}_{\sigma_i} \simeq < 2 > \otimes << -\alpha, -\beta >>$. Si σ_i est orthogonale, on sait alors qu'il existe deux éléments i, j de Q_i tels que $1, i, j, ij$ soit une base de Q_i sur k, orthogonale pour $\mathcal{T}_{\sigma_i}$. Posons $\alpha = i^2$ et $\beta = j^2$. Alors $Q_i = (\alpha, \beta)$ et $\mathcal{T}_{\sigma_i} \simeq < 2 > \otimes << -\alpha, \beta >>$ (cf.[3], §2.1.2). Enfin, un calcul facile montre que $w_{2^{2m-1}}(< 2 > \otimes q) = w_{2^{2m-1}}(q)$, si q est une $2m$-forme de Pfister. Les propositions 2.1 et 2.2 nous donnent alors le résultat.

Bibliographie

[1] DELZANT A. *Définition des classes de Stiefel-Whitney d'un module quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2.* C.R.Acad.Sci. Paris **255**, 1366-1368 (1962)

[2] KNUS M.-A., MERKURJEV A., ROST M., TIGNOL J.-P. *The Book of Involutions.* A.M.S. Colloquium Publications **44** (1998)

[3] QUEGUINER A. *Invariants d'algèbres à involution.* Thèse de l'université de Besançon $n°$**555** (1996)

[4] SCHARLAU W. *Quadratic and Hermitian Forms.* Grundleheren Math. Wiss. vol. **270**. Springer-Verlag. New York (1985)

Adresse:
Equipe de Mathématiques de Besançon
UMR 6623 du C.N.R.S.
16, route de Gray
25030 Besançon Cedex
France