Publications mathématiques de Besançon
Algèbre et théorie des nombres

Thong Nguyen Quang Do

Descente galoisienne et capitulation entre modules de Bertrandias-Payan

2016, p. 59-79.
<http://pmb.cedram.org/item?id=PMB_2016____59_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de Besançon, UMR 6623 CNRS/UFC

Publications mathématiques de Besançon – 2016, 59-79

DESCENTE GALOISIENNE ET CAPITULATION ENTRE MODULES DE BERTRANDIAS-PAYAN

par

Thong Nguyen Quang Do

Résumé. — Étant donné un corps de nombres K et un nombre premier p, le « corps de Bertrandias-Payan » associé, BP_K, est le compositum de toutes les extensions p-cycliques de K qui peuvent se plonger dans des p-extensions cycliques de degré arbitrairement grand. La $\mathbb{Z}_p$-torsion $\mathcal{BP}_K$ du groupe $\mathrm{Gal}(BP_K/K)$, appelée « module de Bertrandias-Payan » attaché au corps K, possède une interprétation algébrique (obstruction à un problème de plongement) et arithmétique (fonctions L p-adiques) intéressante. Pour une extension galoisienne finie L/K de groupe de Galois G, notre but est d'étudier le noyau et le conoyau du morphisme de transfert (ou capitulation) $\mathcal{BP}_K \to \mathcal{BP}_L^G$.

Abstract. — (*Galois descent and capitulation of Bertrandias-Payan modules*) Given a number field K and a prime p, the associated "field of Bertrandias-Payan", BP_K, is the compositum of all the cyclic p-extensions of K which are embeddable into cyclic p-extensions of arbitrary large degree. The $\mathbb{Z}_p$-torsion $\mathcal{BP}_K$ of the group $\mathrm{Gal}(BP_K/K)$, called the "Bertrandias-Payan module"attached to K, has an algebraic meaning (obstruction to an embedding problem) as well as an arithmetic interest (p-adic L-functions). For a finite Galois extension L/K with Galois group G, we aim to study the kernel and cokernel of the so called transfer (or capitulation) morphism $\mathcal{BP}_K \to \mathcal{BP}_L^G$.

1. La suite exacte de capitulation

Ce travail, bien que personnel, s'est fait en concertation avec G. Gras et J.-F. Jaulent ([G1], [J1]), dans la perspective d'une synthèse de divers problèmes de capitulation avec ramification restreinte. On se concentre ici sur la capitulation du module de Bertrandias-Payan (qui est un objet p-adique) dans une extension finie L/K de corps de nombres. Rappelons d'abord quelques définitions. Il est d'usage d'appeler *morphisme de capitulation* ou *transfert* l'homomorphisme naturel $C\ell_K \to C\ell_L$ entre les groupes de classes de K et L induit par l'extension des idéaux. Si en outre L/K est galoisienne, de groupe de Galois G, l'étude de la *suite exacte*

Classification mathématique par sujets (2010). — 11R37,11R34, 11R23.
Mots clefs. — $\mathbb{Z}_p$-torsion, $\mathbb{Z}_p$-ramification, capitulation, embedding problem.

de capitulation :

$$1 \to \operatorname{Ker} i_{L/K} \to C\ell_K \xrightarrow{i_{L/K}} C\ell_L^G \to \operatorname{Coker} i_{L/K} \to 1$$

constitue l'un des thèmes de la théorie des genres, avec en point d'orgue la *formule des classes ambiges* exprimant le quotient $|(C\ell_L)^G|/|C\ell_K|$. Ce type de problème peut se généraliser aux classes de rayons, en privilégiant par exemple le point de vue p-adique. Introduisons quelques notations générales :

– la lettre K désigne un corps de nombres, la lettre p un nombre premier impair ;

– on note $\mu_{p^n}(K)$ le groupe des racines p^n-ièmes de 1 contenues dans K et $\mu(K) = \cup_n \mu_{p^n}(K)$;

– on fixe S un ensemble fini de places de K contenant l'ensemble des p-places de K (on omet la référence à K s'il n'y a pas de confusion possible) ;

– on désigne par K_S l'extension algébrique maximale de K qui est S-ramifiée, i.e. non-ramifiée en dehors de S, on pose $W_K^S = \oplus_{v\, \in S}\, \mu(K_v)$, $\mathcal{W}_K^S = W_K^S / i_K(\mu(K))$ où i_K désigne l'injection diagonale (on écrira simplement W_K et $\mathcal{W}_K$ si $S = S_p$) ;

– on pose aussi $G_K^S = \mathrm{Gal}(K_S/K)$, on définit $\mathcal{X}_K^S$ comme le pro-p-complété de $(G_K^S)^{ab}$ qui est de $\mathbb{Z}_p$-type fini (on écrira simplement $\mathcal{X}_K$ si $S = S_p$) ;

– le compositum de toutes les $\mathbb{Z}_p$-extensions de K est noté $\widetilde{K}$, on pose $\widetilde{\mathcal{X}_K} = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$;

– enfin, $\mathcal{T}_K^S$ est le module de $\mathbb{Z}_p$-torsion de $\mathcal{X}_K^S$ (on écrira simplement $\mathcal{T}_K$ si $S = S_p$).

La conjecture de Leopoldt pour K en p dit que le $\mathbb{Z}_p$-rang de $\mathcal{X}_K^S$ (indépendant de S contenant S_p) est égal à $1+r_2$, où r_2 est le nombre de paires de plongements complexes de K. Rappelons que l'intérêt de $\mathcal{T}_K^S$ vient de ce que, pour un corps totalement réel K, ce module « contient » les fonctions L p-adiques associées à K. Si L/K est une p-extension (galoisienne) S-ramifiée, on peut étudier le morphisme de capitulation $\mathcal{X}_K^S \to (\mathcal{X}_L^S)^G$, ou le morphisme de capitulation $\mathcal{T}_K^S \to (\mathcal{T}_L^S)^G$. Dans le cas où S contient les p-places et les places ramifiées de L/K, la solution du problème de capitulation pour $\mathcal{T}_K^S$ et $\mathcal{X}_K^S$ est donnée par la conjecture de Leopoldt : si elle est vraie pour L, il est connu que $\mathcal{T}_K^S \simeq (\mathcal{T}_L^S)^G$ et $\mathcal{X}_K^S \simeq (\mathcal{X}_L^S)^G$; pour $\mathcal{X}_K$ et $\mathcal{T}_K$, il faut en outre tenir compte de phénomènes de « primitivité » ou non de la ramification dans S (voir [G3, chap. IV] ; voir aussi les §2.2 et §3.1 ci-dessous).
On peut ensuite remplacer le module $\mathcal{T}_K^S$ par le sous-module de Bertrandias-Payan $\mathcal{BP}_K$, qui possède des propriétés plus fines et qui peut être considéré comme un analogue « dual tordu » de la p-partie du noyau sauvage de la K-théorie (voir la fin du §3). Du point de vue du problème de plongement, $\mathcal{BP}_K$ mesure l'obstruction entre « $\mathbb{Z}_p$-plongeabilité globale » et « $\mathbb{Z}_p$-plongeabilité locale partout ». Rappelons les définitions : une p-extension cyclique F/K est dite *$\mathbb{Z}_p$-plongeable* (resp. *infiniment p-plongeable*) si elle se plonge dans une $\mathbb{Z}_p$-extension cycmique de K (resp. dans toute p-extension cyclique de K de degré arbitrairement grand) ; localement les deux notions coïncident, mais pas globalement. Introduisons alors :

– le corps, BP_K de Bertrandias-Payan de K, c'est-à-dire le compositum de toutes les p-extensions cycliques infiniment plongeables de K (ne dépend pas de S) ;

– le groupe $\mathcal{C}_K = \mathrm{Gal}(BP_K/K)$ et $\mathcal{BP}_K = \mathrm{Gal}(BP_K/\widetilde{K})$ le $\mathbb{Z}_p$-module de torsion de $\mathcal{C}_K$ (indépendants de S) ;

– le morphisme naturel $\mathcal{J}_{L/K} \colon \mathcal{C}_K \to \mathcal{C}_L^G$ déduit de $\mathcal{X}_K \to \mathcal{X}_L^G$ par passage au quotient et le morphisme $j_{L/K} \colon \mathcal{BP}_K \to \mathcal{BP}_L^G$ déduit de $\mathcal{J}_{L/K}$ par restriction.

On se propose d'étudier la suite exacte de capitulation pour les modules de Bertrandias-Payan dans une extension L/K galoisienne S-ramifiée de groupe G :

$$1 \to \mathrm{Ker}\, j_{L/K} \to \mathcal{BP}_K \xrightarrow{j_{L/K}} \mathcal{BP}_L^G \to \mathrm{Coker}\, j_{L/K} \to 1.$$

NB : L'idée d'une telle entreprise a germé à la lecture de la prépublication [S], où l'auteur étudie un analogue du problème de la p-tour des classes de K, c'est-à-dire la finitude ou l'infinitude d'une tour $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$ obtenue en « empilant » des modules de Bertrandias-Payan. Modulo la conjecture de Leopoldt, son résultat central est qu'un certain quotient (assez compliqué) de $|\mathcal{BP}_K|$ divise $|\mathcal{BP}_{K_1}|$ ([S, thm. 3.2]), d'où il déduit principalement que la tour est infinie si K ne contient pas μ_p et $\mathcal{BP}_K$ n'est pas trivial ([S, coroll. 3.4]). L'un de nous (G. Gras) ayant observé que ces résultats pouvaient s'obtenir facilement par la théorie existante de la p-ramification abélienne, nous avons alors conçu le projet d'étudier systématiquement la capitulation entre modules de Bertrandias-Payan en utilisant toutes les variantes du corps de classes (voir l'introduction de [G1]).

Si K vérifie la conjecture de Leopoldt en p, on sait que $\mathcal{C}_K \simeq \mathcal{X}_K^S/\mathcal{W}_K^S$ et $\mathcal{B}P_K \simeq \mathcal{T}_K^S/\mathcal{W}_K^S$. On dispose également d'une description cohomologique de $\mathcal{T}_K^S$ et de $\mathcal{B}P_K$ (voir [N1]) qui servira dans la suite : sous Leopoldt, $\mathcal{T}_K^S$ est isomorphe au dual de Pontryagin de $H^2(G_K^S, \mathbb{Z}_p)$, et $\mathcal{BP}_K$ est isomorphe au noyau de localisation

$$\mathrm{Ker}_S^1(K, \mu_{p^\infty}) := \mathrm{Ker}(H^1(G_K^S, \mu_{p^\infty}) \to \oplus_{v\in S} H^1(K_v, \mu_{p^\infty}))$$

(indépendant de S). Notons que $\mathcal{BP}_K$ est indépendant de S, mais notre approche du module des points fixes $\mathcal{BP}_L^G$ fera intervenir la ramification des places de S dans L/K, ce qui présente à la fois des avantages et des inconvénients (voir en particulier les §3.1 et §3.2 ci-après). La question de l'intégralité du quotient $|\mathcal{BP}_L^G|/|\mathcal{BP}_K|$, équivalente à celle du quotient $|\mathrm{Coker}\, j_{L/K}|/|\mathrm{Ker}\, j_{L/K}|$, est directement liée au problème précédemment cité de la tour des modules de Bertrandias-Payan (voir l'introduction de [S]).

2. Le noyau de capitulation

Dans ce paragraphe, on va déterminer le noyau du morphisme de capitulation $j_{L/K}$ dans la configuration décrite dans la section 1. La formulation cohomologique de $\mathcal{BP}_L$ montre immédiatement qu'on peut se restreindre au cas où G est un p-groupe, puis, par « dévissage », au cas où G est cyclique d'ordre p (même si les résultats dans le cas général risquent d'être moins commodes à formuler). L'étude se fera en deux temps : dans un premier temps, en utilisant seulement les propriétés fonctorielles de la cohomologie galoisienne ; dans un second, en faisant intervenir des résultats plus fins de la cohomologie S-ramifiée.

2.1. Approche cohomologique. — La cohomologie de $\mu(L)$ se calcule facilement à partir de la norme de L/K si G est cyclique. Dans le cas général, notons L^c l'extension cyclotomique $L \cap K(\mu(L))$ et $H = \mathrm{Gal}(L/L^c)$. L'extension L/K est dite *cyclotomique* si $L = L^c$. Il est connu que $\mu(L)$ est cohomologiquement trivial pour l'action de $G/H \simeq \mathrm{Gal}(L^c/K)$, d'où l'on tire immédiatement, par inflation-restriction, un isomorphisme $H^1(G, \mu(L)) \simeq H^1(H, \mu(L))^G = \mathrm{Hom}_G(H, \mu(L))$.

Cas particulier où G est cyclique d'ordre p. On peut écarter le cas où $\mu(K)$ (donc aussi $\mu(L)$) est trivial. Alors, si $\mu(K) \neq \mu(L)$, l'extension L/K est cyclotomique de degré p et $\mu(L)$ est G-cohomologiquement trivial. Sinon, $\mu(K) = \mu(L)$ et $H^i(G, \mu(L))$ est d'ordre p pour $i = 1, 2$.

La cohomologie de W_L^S s'obtient par le lemme de Shapiro. Il dit que, si pour toute place v de K dans S, une place arbitraire w de L est fixée au-dessus de v, alors, pour tout $i \geq 0$, $H^i(G, W_L^S) \simeq \oplus_{v \in S} H^i(L_w/K_v, \mu(L_w))$. Les groupes locaux se calculent comme dans le cas global.

La cohomologie de $\mathcal{W}_L^S$ intervient de deux façons :

(i) La suite exacte $1 \to \mu(L) \to W_L^S \to \mathcal{W}_L^S \to 1$ définissant $\mathcal{W}_L^S$ donne par cohomologie une suite exacte $1 \to \mathcal{W}_K^S \to (\mathcal{W}_L^S)^G \to H^1(G, \mu(L)) \to H^1(G, W_L^S) \to \ldots$. Si l'extension L/K est cyclotomique, $\mathcal{W}_K^S = (\mathcal{W}_L^S)^G$; dans tous les cas, on a l'isomorphisme $(\mathcal{W}_L^S)^G/\mathcal{W}_K^S \simeq \mathrm{Ker}(H^1(G, \mu(L)) \to H^1(G, W_L^S))$. Une conséquence immédiate est que l'ordre de $(\mathcal{W}_L^S)^G/\mathcal{W}_K^S$ est borné par celui de $H^1(G, \mu(L))$.

(ii) Supposons que L/K est S-ramifiée, i.e. non ramifiée hors de S. La cohomologie de la suite exacte $1 \to \mathcal{W}_L^S \to \mathcal{T}_L^S \to \mathcal{BP}_L \to 1$ définissant $\mathcal{BP}_L$ fournit un diagramme commutatif aux lignes exactes :

(1)
$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & (\mathcal{W}_L^S)^G \arrow[r] & (\mathcal{T}_L^S)^G \arrow[r] & (\mathcal{BP}_L)^G \arrow[r, "\theta_S"] & H^1(G, \mathcal{W}_L^S) \arrow[r, "\rho_S"] & H^1(G, \mathcal{T}_L^S) \\
1 \arrow[r] & \mathcal{W}_K^S \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{T}_K^S \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{BP}_K \arrow[r] \arrow[u, "j_{L/K}"'] & 1. &
\end{tikzcd}
$$

En supposant la conjecture de Leopoldt pour L, la flèche verticale du milieu est un isomorphisme d'après les rappels du §1. Par le lemme du serpent, on en déduit immédiatement que $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} \simeq (\mathcal{W}_L^S)^G/\mathcal{W}_K^S \hookrightarrow H^1(G, \mu(L))$. En particulier, $j_{L/K}$ est injectif si $H^1(G, \mu(L)) \simeq \mathrm{Hom}(H, \mu(L))$ est trivial.

Cas particulier où G est cyclique. Alors $H^1(G, \cdot) \simeq \hat{H}^{-1}(G, \cdot)$ et, en désignant par s un générateur de G, il résulte de (i) et de (ii) que $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} \simeq i_L(\mu(L)) \cap (\mathcal{W}_L^S)^{1-s}/i_L(\mu(L))^{1-s}$. Si G est d'ordre p, $H^1(G, \mu(L))$ est d'ordre 1 ou p, donc $\mathrm{Ker}\, j_{L/K}$ également.

Théorème 2.1 **(**[G1, lemme 2.4 et thm. 3.1]**).** — *Soit L/K une p-extension cyclique S-ramifiée, vérifiant la conjecture de Leopoldt en p, de groupe de Galois $G = \langle s \rangle$. Alors* $\mathrm{Ker}\, j_{L/K}$ *est cyclique, isomorphe à* $\{\xi_L \in W_L^S : \xi_L^{1-s} \in i_L(\mu(K))\}/W_L^S \cdot i_L(\mu(L))$.

Démonstration. — Il est facile de voir que $\mu(L)/\mu(K) \simeq \mu(L)^{1-s}$, $W_L^S/W_K^S \simeq (W_L^S)^{1-s}$ et $W_K^S \cdot i_L(\mu(L))/W_K^S \simeq \mu(L)/\mu(K)$. Comme dans [G1, §2.4], nous pouvons alors écrire la suite exacte

$$1 \to i_L(\mu(L)) \cap (W_L^S)^{1-s}/i_L(\mu(L))^{1-s} \to W_L^S/W_K^S \cdot i_L(\mu(L)) \xrightarrow{1-s}$$
$$\xrightarrow{1-s} (W_L^S)^{1-s} \cdot i_L(\mu(K))/i_L(\mu(K)) \simeq (W_L^S)^{1-s}/(W_L^S)^{1-s} \cap i_L(\mu(K)) \to 1,$$

d'où l'isomorphisme annoncé. $\square$

On peut en tirer des critères d'injectivité de $j_{L/K}$ dans le cas cyclique comme dans le théorème 3.1 de [G1]. Pour un calcul de l'ordre de $\operatorname{Ker} j_{L/K}$, donc un critère d'injectivité général, voir le théorème 2.5 ci-dessous.

2.2. Approche kummerienne. — On a vu précédemment que $j_{L/K}$ est injectif si $\mu(L) = 1$. On se place dans cette sous-section dans la situation kummerienne (i.e. K contient μ_p) pour préciser le noyau de capitulation dans le cas où il n'est pas trivial. De toute façon, dans le cas général, puisque p est impair, on peut toujours monter dans $K(\mu_p)$ puis redescendre sans problème.

Rappel. Dans le cas kummerien, une p-extension cyclique (globale ou locale) est dite cyclotomique si et seulement si elle est contenue dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique du corps de base. Dans une extension globale L/K, si une place v de K est non ramifiée dans L, l'extension locale L_w/K_v est forcément cyclotomique ; si v se décompose totalement dans L, dire que L/K est localement cyclotomique en v signifie que $L_w = K_v$.

Si G est d'ordre p, alors $H^1(G, \mu(L))$ est d'ordre p, et si L/K n'est pas cyclotomique, $\operatorname{Ker} j_{L/K}$ est non trivial si et seulement si $\operatorname{Ker} j_{L/K} \simeq H^1(G, \mu(L))$ (voir (ii) juste avant le théorème 2.1). De plus, le théorème 2.1 nous dit que ce cas se produit si et seulement si l'extension L/K n'est pas cyclotomique mais, pour toute place $v \in S$, l'extension locale L_w/K_v est cyclotomique. Par ailleurs, pour toute place $v \notin S$, L_w/K_v est non ramifiée, donc cyclotomique. En résumé :

Théorème 2.2 **(**[G1, thm 3.1]**).** — *Soit L/K une extension cyclique S-ramifiée de degré p, contenant μ_p, vérifiant la conjecture de Leopoldt en p, qu'on écrit $L = K(\sqrt[p]{\alpha}), \alpha \in K^*$ avec $v(\alpha) \equiv 0 \pmod p$ pour toute place $v \notin S$. Le morphisme de capitulation $j_{L/K}$ est non injectif si et seulement si l'extension L/K n'est pas globalement cyclotomique, mais est localement cyclotomique partout. Dans ce cas, $\operatorname{Ker} j_{L/K}$ s'identifie naturellement à $\langle\alpha\rangle \bmod K^{*p}$.*

Remarques.

(i) Soulignons qu'en toute place de $S \setminus S_p$, toute extension cyclotomique locale est non ramifiée, et par suite la *non-trivialité de* $\operatorname{Ker} j_{L/K}$ *oblige l'extension à être p-ramifiée.* Donc, dans le théorème 2.2 comme dans le théorème 2.3 ci-dessous, on peut prendre $S = S_p$.

(ii) Une extension comme dans le théorème 2.2 est localement cyclotomique partout si et seulement si l'extension locale L_w/K_v se plonge dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K_v en toute place v de K. Il en résulte, par le corps de classes, que l'extension L/K est infiniment plongeable, i.e. qu'elle se plonge dans BP_K, le corps de Bertrandias-Payan de K.

2.3. Approche par la cohomologie S-ramifiée. — Cette sous-section sera consacrée à une autre preuve du théorème 2.2, basée directement sur la description cohomologique de $\mathcal{BP}_K$ rappelée dans la section 1, et dont l'intérêt sera de permettre d'approcher aussi le conoyau de capitulation (voir la section 3). Introduisons la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique $K_\infty = K(\mu_{p^\infty})$, avec $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$; notons $X_\infty = X_\infty(K)$ le groupe de Galois sur K_∞ de la pro-p-extension abélienne maximale de K_∞ qui est non ramifiée partout, totalement décomposée en toutes les p-places (donc en toutes les places finies). Si K vérifie la conjecture de Leopoldt en p, rappelons que la dualité de Poitou-Tate entraîne, indépendamment de S contenant S_p, un isomorphisme ([N1, thm. 1.1]) :

$$\mathcal{BP}_K \simeq \mathrm{Ker}^1_S(K, \mu_{p^\infty}) := \mathrm{Ker}(H^1(G^S_K, \mu_{p^\infty}) \to \bigoplus_{v\in S} H^1(K_v, u_{p^\infty})) \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty, \mu_{p^\infty}). \tag{2}$$

Cette description cohomologique permet de régler sans effort le problème de capitulation pour une extension cyclotomique L/K (i.e. contenue dans K_∞) : en effet, $\mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty(K), \mu_{p^\infty}) = \mathrm{Hom}(X_\infty(K), \mu_{p^\infty})^\Gamma$ par définition, et la descente donne immédiatement un isomorphisme $\mathcal{BP}_K \simeq \mathcal{BP}_L^G$.

La finitude de $\mathcal{BP}_K$ permet aussi d'en donner une description « effective » en termes de S-unités hyper-S-primaires ([N2, prop. 2.1]) : comme $\mathcal{BP}_K$ est indépendant de S, choisissons un S « suffisamment gros » pour que le p-groupe des S-classes d'idéaux de K soit nul, ainsi qu'un entier m tel que p^m soit supérieur à l'exposant de $\mathcal{T}_K^S$; notons E_K^S le groupe des S-unités de K. Alors

$$\mathcal{BP}_K \simeq \{x \in E_K^S : x \in K_v^{*p^m} \text{ pour tout } v \in S\}/(E_K^S)^{p^m}. \tag{3}$$

Remarques.

(i) Dans (2) et (3), le module $\mathcal{BP}_K$, qui est un groupe de Galois, s'identifie asymptotiquement à un radical kummerien. C'est là une manifestation du phénomène du « miroir » (Spiegelung) en théorie d'Iwasawa.

(ii) Notons K_∞^{spl} l'extension abélienne de K_∞ dont le groupe de Galois est $(X_\infty)_\Gamma$. C'est la pro-p-extension abélienne maximale de K qui est totalement décomposée partout au-dessus de K_∞. Pour toute p-extension L/K localement cyclotomique partout, on a $L \cdot K_\infty \subset K_\infty^{spl}$.

(iii) Le module de codescente $(X_\infty)_\Gamma$ est appelé groupe des « classes logarithmiques » et noté $\widetilde{C\ell}_K$ par J.-F. Jaulent, qui en donne une description de type non asymptotique, au niveau de K (voir e.g. [J2]). Notons γ un générateur topologique de Γ, κ le caractère cyclotomique, et $X_\infty(-1)$ le module tordu (-1)-fois à la Tate. Si K contient μ_p, on voit tout de suite que les groupes $X_\infty(-1)/(p, \gamma - 1)$ et $X_\infty/(p, \kappa(\gamma)^{-1}\gamma - 1)$ sont isomorphes car $\kappa(\gamma) \equiv 1 \bmod p$, d'où l'on déduit que $\mathcal{BP}_K$ et $(X_\infty)_\Gamma$ ont le même nombre minimal de générateurs. Or, sous certaines conditions de ramification, la *formule des classes ambiges logarithmiques* de [J2] permet de fabriquer des exemples où $\widetilde{C\ell}_L$ est trivial, donc aussi $\mathcal{BP}_L$. Pour une approche par la *théorie des genres des classes logarithmiques*, voir les théorèmes 2.3 et 3.9, et la proposition 3.13 ci-dessous.

Revenons à la description cohomologique (2). Dans une extension L/K galoisienne de groupe G, vérifiant Leopoldt en p, non ramifiée en dehors de S contenant S_p, le morphisme de capitulation $j_{L/K}$ est induit par la restriction $res_{L/K}\colon H^1(G_K^S,\mu_{p^\infty}) \to H^1(G_L^S,\mu_{p^\infty})$. La suite exacte d'inflation-restriction-transgression de Hochschild-Serre

$$1 \to H^1(G,\mu(L)) \xrightarrow{inf_{L/K}} H^1(G_K^S,\mu_{p^\infty}) \xrightarrow{res_{L/K}} H^1(G_L^S,\mu_{p^\infty})^G \xrightarrow{trg_{L/K}} H^2(G,\mu(L))$$

permet ainsi d'écrire la suite exacte de capitulation sous la forme
(4)

$$1 \to H^1(G,\mu(L)) \cap \mathrm{Ker}^1_S(K,\mu_{p^\infty}) \to \mathrm{Ker}^1_S(K,\mu_{p^\infty}) \xrightarrow{j_{L/K}} \mathrm{Ker}^1_S(L,\mu_{p^\infty})^G \to \mathrm{Coker}\, j_{L/K} \to 1$$

où le morphisme $j_{L/K}$ est induit par la restriction cohomologique.

Dans la situation kummerienne, on prend $L = K(\sqrt[p]{\alpha})$, $\alpha \in K^*$ et l'on se propose de décrire le noyau $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} = H^1(G,\mu(L)) \cap \mathrm{Ker}^1_S(K,\mu_{p^\infty})$ par des conditions portant sur $\alpha \bmod K^{*p}$. Pour les calculs cohomologiques, comme $\mathrm{Ker}\, j_{L/K}$ est au plus d'ordre p, on peut se restreindre dans (4) aux sous-modules tués par p, notés $(\cdot)[p]$.

Théorème 2.3 **(**[G1, thm. 3.1]**).** — *Soit $L = K(\sqrt[p]{\alpha})$, $\alpha \in K^*$, une extension cyclique de degré p, de groupe de Galois G, vérifiant la conjecture de Leopoldt en p. On suppose que cette extension est S-ramifiée, i.e. que $v(\alpha) \equiv 0 \pmod p$ pour toute place $v \notin S$, et en outre que $\mu(L) = \mu(K) \neq 1$ (sinon le noyau de capitulation est trivial). Alors $\mathrm{Ker}\, j_{L/K}$ est non trivial si et seulement si $\alpha \bmod K^{*p} \in \mu(K_v) \bmod K_v^{*p}$ pour toute place $v \in S$. Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\, j_{L/K}$ s'identifie naturellement au groupe $\langle\alpha\rangle \bmod K^{*p}$.*

Démonstration. — On a vu que $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} = H^1(G,\mu(L)) \cap \mathrm{Ker}^1_S(K,\mu_{p^\infty})[p]$, et sa non trivialité signifie que $H^1(G,\mu(L))$ est inclus dans $\mathrm{Ker}^1_S(K,\mu_{p^\infty})[p]$. Il suffit maintenant de décrire ce dernier module en termes galoisiens. Comme dans la remarque (ii) ci-dessus, et avec les mêmes notations, $\mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty,\mu_{p^\infty})[p] = \mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty(-1),\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[p] \simeq \mathrm{Hom}(X_\infty/(p,\gamma-1),\mu_p)$ car K contient μ_p . L'inclusion précédente signifie alors que $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ est un quotient de X_∞, i.e. est partout totalement décomposée. Comme L/K n'est pas cyclotomique à cause de l'hypothèse $\mu(L) = \mu(K)$, cela équivaut à dire que L/K est localement cyclotomique partout. □

On a ainsi retrouvé le théorème 2.2. On peut utilement extraire de la démonstration la :

Scolie 2.4. — *L'extension $L = K(\sqrt[p]{\alpha})$, supposée non cyclotomique, est localement cyclotomique partout si et seulement si $\alpha \bmod K^{*p} \in \mathrm{Ker}^1_S(K,\mu_{p^\infty})[p]$. Si K contient μ_{p^n}, on peut remplacer p par p^n dans l'énoncé précédent.*

Théorème 2.5 **(**[J1, thm. 9 et coroll. 11]**).** — *Soit L/K une p-extension (galoisienne), soit L^c sa sous-extension cyclotomique maximale, et soit L^{lc} sa sous-extension maximale qui est localement cyclotomique partout, avec $G^{lc} = \mathrm{Gal}(L^{lc}/K)$. Alors $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} = \mathrm{Ker}\, j_{L^{lc}/K} \simeq H^1(G^{lc},\mu(L)) \simeq \mathrm{Hom}_{G^{lc}}(H,\mu(L^{lc}))$. Cas particulier : si l'extension L/K est abélienne, alors $\mathrm{Ker}\, j_{L/K}$ est d'ordre égal à $\min(|\mu(K)|,[L^{lc}:L^c])$.*

Démonstration. — D'après la suite exacte (4), $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} = H^1(G,\mu(L)) \cap \mathrm{Ker}^1_S(K,\mu_{p^\infty}) = H^1(G,\mu(L)) \cap \mathrm{Ker}^1_S(K,\mu_{p\infty})^\Gamma$, et c'est cette dernière intersection qu'il faut expliciter. Puisque L/K est une p-extension, la trivialité de $\mu(K)$ entraîne celle de $\mu(L)$, donc aussi celle de $H^1(G,\mu(L))$, et par suite on peut d'emblée se placer dans le cas kummerien. Posons $H = \mathrm{Gal}(L^{lc}/L^c)$ et $G^c = \mathrm{Gal}(L^c/K)$. Par définition de L^c, l'extension L/L^c est linéairement disjointe de K_∞/K, et par définition de L^{lc}, on a $L^{lc} \cdot K_\infty = L \cdot K_\infty \cap K_\infty^{spl}$, autrement dit $H^1(G, \mu(L)) \cap \mathrm{Ker}^1_S(K, \mu_{p^\infty})^\Gamma = \mathrm{Hom}_{G^c}(H, \mu(L)) = \mathrm{Hom}_{G^{lc}}(H, \mu(L))$. Mais le calcul du tout début de la section 2.1 montre que $\mathrm{Hom}_{G^{lc}}(H, \mu(L^{lc})) = H^1(G^{lc}, \mu(L^{lc}))$, et comme $\mu(L^{lc}) = \mu(L)$, on a bien $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} = \mathrm{Ker}\, j_{L^{lc}/K} \simeq H^1(G^{lc}, \mu(L))$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{G^{lc}}$ est un foncteur Hom de G^{lc}-modules. Si L/K est abélienne, l'action de G^{lc} sur H par automorphismes intérieurs est l'action triviale, donc en fait $\mathrm{Hom}_{G^{lc}}(H, \mu(L^{lc})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mu(K)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H/|\mu(K)|H, \mu(K))$. En décomposant H en somme directe de groupes cycliques, on peut se ramener au cas où H est cyclique ; un homomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H/|\mu(K)|H, \mu(K))$ est alors déterminé par la donnée de l'image d'un générateur de $H/|\mu(K)|H$, d'où évidemment la formule cherchée pour l'ordre de $\mathrm{Ker}\, j_{L/K}$. □

Le théorème précédent règle complètement le problème de la détermination du noyau de capitulation pour les p-extensions.

Complément 2.6. — Dans les hypothèses du théorème 2.3 et en supposant $j_{L/K}$ non injectif, G. Gras demande comment la capitulation se répartit entre unités et classes d'idéaux ([G1, §4.1] ; voir aussi [J1, §7] pour une question voisine, mais pas identique). La réponse ne paraît pas simple. Précisons d'abord le problème dans notre contexte, où nous pouvons prendre $S = S_p$ d'après la remarque (i) suivant le théorème 2.2. La surjection naturelle de $\mathcal{X}_K$ sur le p-groupe A_K des S_p-classes d'idéaux induit un homomorphisme $\psi_K \colon \mathcal{BP}_K \to A_K$ dont on notera $\mathcal{R}_K$ et B_K respectivement le noyau et le conoyau. Un dessin galoisien montre immédiatement que $B_K = \mathrm{Gal}(H_K/H_K \cap \widetilde{K})$, où H_K est le p-corps des S_p-classes de Hilbert, et $\mathcal{R}_K$ est la $\mathbb{Z}_p$-torsion du sous-groupe de S_p-décomposition de $\mathcal{BP}_K$ (qu'on peut baptiser « régulateur p-adique » d'après [G1]). En notant $\mathcal{O}_K$ et E_K respectivement les S_p-entiers et les S_p-unités de K, les formulations cohomologiques (2) et (3) donnent tout de suite : pour $m \gg 0$, $\mathcal{R}_K \simeq \mathrm{Ker}(E_K/E_K^{p^m} \to \oplus_{S_p} K_v^*/K_v^{p^m})$ et $[\mathfrak{U}] \in B_K$ si et seulement si $\mathfrak{U}^{p^m} = a\mathcal{O}_K$, avec $a \in K_v^{*p^m}$ pour tout $v \in S_p$ ([N2, prop. 1.4] ; voir aussi [G1, §4.1]). Le noyau de capitulation « se partage » alors entre $\mathcal{R}_K$ et B_K au sens suivant : soit $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} \subset \mathcal{R}_K$, et l'on dit que la capitulation dans L/K provient du régulateur ; soit $\mathrm{Ker}\, j_{L/K}$ s'identifie par ψ_K à un sous-module de B_K, et l'on dit qu'elle provient des classes d'idéaux. Pour départager les deux cas, introduisons les $\mathbb{Z}_p$-extensions cyclotomiques K_∞ et L_∞ et regardons la montée entre deux étages successifs. Comme L_n/K_n et K_∞/K_n sont linéairement disjointes, et comme $\mathcal{BP}_{K_n} \simeq \mathcal{BP}_{K_{n+1}}^{\Delta_n}$, $\Delta_n = \mathrm{Gal}(K_{n+1}/K_n)$, il est clair que $\mathrm{Ker}\, j_{L_n/K_n}$ s'injecte naturellement dans $\mathrm{Ker}\, j_{L_{n+1}/K_{n+1}}$, et comme ces deux noyaux sont d'ordre p, ils coïncident. Alors :

(a) Si la capitulation dans L/K provient du régulateur, on obtient, par limite inductive dans la tour cyclotomique, un sous-groupe d'ordre p du radical kummerien $\psi(K) = \mathrm{Ker}^1_{S_p}(K_\infty, \mu_{p^\infty}) \cap E_{K_\infty} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, qui est, modulo la validité asymptotique de la conjecture de Kuz'min-Gross, un invariant *fini* de K_∞/K ; plus précisément, ce radical est en fait isomorphe à la limite inductive stable des noyaux des projections naturelles $X(K_\infty)_{\Gamma_n} \to A_{K_n}$ (voir [LMN] ou le lemme 3.15 ci-dessous).

(b) Si la capitulation dans L/K provient des classes d'idéaux, on obtient de même un sous-groupe d'ordre p de $B_\infty := \varinjlim_n B_{K_n} \subset A_\infty := \varinjlim_n A_{K_n}$. Rappelons ici que la *conjecture de Greenberg*, en abrégé (CG), prédit que si K est un corps totalement réel, le module

$X_\infty := \varprojlim_n A_{K_n}$ est fini ou, de façon équivalente (voir [Gb, prop. 2] qui n'a besoin pour cette équivalence d'aucune hypothèse sur K), si le module A_∞ est nul. Or, pour K quelconque, l'on a montré dans [N2, §4], que $Z_\infty := \varprojlim_n B_{K_n}$ est auto-dual (dualité à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$) à pseudo-isomorphisme près. Donc, si K est CM, Z_∞^+ et Z_∞^- sont pseudo-duaux, et (GC) équivaut à la finitude de Z_∞ (plus précisément, $Z_\infty^+ = X_\infty^+$ est fini et Z_∞^- est nul), ou encore, d'après Greenberg *op. cit.*, à la nullité de B_∞. On peut ainsi proposer une version de la conjecture de Greenberg étendue à tout corps de base, en abrégé (CGE) : *pour tout corps de nombres, B_∞ est nul* ([NN, conjecture 2 de l'appendice]).

Il découle immédiatement de (a) et (b) que, modulo (CGE), $\operatorname{Ker} j_{L/K}$ provient toujours du régulateur p-adique de $\mathcal{R}_K$ et s'identifie à un sous-groupe de $\psi(K)$.

3. Le conoyau de capitulation

Dans ce paragraphe on se propose d'étudier principalement le conoyau $\operatorname{Coker} j_{L/K}$ suivant le même schéma que dans la section 2, i.e. en appliquant d'abord les mécanismes fonctoriels de la cohomologie, ensuite des propriétés plus spécifiques à la S-ramification. Comme toujours, L/K est une p-extension (pas forcément cyclique), S-ramifiée, vérifiant la conjecture de Leopoldt en p. Le but poursuivi est l'obtention d'une formule des classes ambiges ou d'une formule des genres, i.e. d'une expression plus ou moins satisfaisante du quotient $q_{L/K} := |\mathcal{BP}_L^G|/|\mathcal{BP}_K| = |\operatorname{Coker} j_{L/K}|/|\operatorname{Ker} j_{L/K}|$. Le problème étudié par Seo dans [S] revient essentiellement à celui de l'intégralité de $q_{L/K}$.

3.1. Cohomologie de $\mathcal{T}_L^S$. — Revenons au diagramme commutatif de la section 2.1 :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & (\mathcal{W}_L^S)^G \arrow[r] & (\mathcal{T}_L^S)^G \arrow[r] & (\mathcal{BP}_L)^G \arrow[r, "\theta_S"] & H^1(G,\mathcal{W}_L^S) \arrow[r, "\rho_S"] & H^1(G,\mathcal{T}_L^S) \\
1 \arrow[r] & \mathcal{W}_K^S \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{T}_K^S \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"'] & \mathcal{BP}_K \arrow[r] \arrow[u, "j_{L/K}"'] & 1. &
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{T}_K^S \simeq (\mathcal{T}_L^S)^G$, le lemme du serpent donne immédiatement $\operatorname{Coker} j_{L/K} \simeq \operatorname{Im}\theta_S = \operatorname{Ker}\rho_S$ et $\operatorname{Ker} j_{L/K} \simeq (\mathcal{W}_L^S)^G/\mathcal{W}_K^S \simeq \operatorname{Im}\psi_S$, où ψ_S prend place dans la suite exacte naturelle $1 \to (\mathcal{W}_L^S)^G/\mathcal{W}_K^S \xrightarrow{\psi_S} H^1(G,\mu(L)) \xrightarrow{\nu_S} H^1(G,W_L^S)$ (section 2.1 (i)). On en déduit que $q_{L/K} = |\operatorname{Im}\theta_S|/|\operatorname{Im}\psi_S| = |\operatorname{Ker}\rho_S|/|\operatorname{Ker}\nu_S|$.

La cohomologie de $\mathcal{W}_L^S$ ayant été calculée dans la section 2.1, l'étape naturelle suivante consiste à étudier celle de $\mathcal{T}_L^S$. On rappelle que $\mathcal{X}_L^S$ est le pro-p-complété de $(G_L^S)^{ab}$ et l'on note $\widetilde{\mathcal{X}_L}$ son quotient $\mathbb{Z}_p$-libre, i.e. $\widetilde{\mathcal{X}_L} = \mathcal{X}_L^S/\mathcal{T}_L^S$ (indépendant de S).

Lemme 3.1. — *Si L vérifie la conjecture de Leopoldt en p, alors $H^1(G,\mathcal{T}_L^S) \simeq \widetilde{\mathcal{X}_L}^G/\widetilde{\mathcal{X}_K}$ (indépendant de S contenant S_p).*

Démonstration. — À partir de la définition de $\widetilde{\mathcal{X}_L}$, on obtient par cohomologie un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & (\mathcal{T}_L^S)^G & \longrightarrow & (\mathcal{X}_L^S)^G & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{X}_L}^G & \longrightarrow & H^1(G,\mathcal{T}_L^S) \longrightarrow H^1(G,\mathcal{X}_L^S) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_K^S & \longrightarrow & \mathcal{X}_K^S & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{X}_K} & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Si L vérifie la conjecture de Leopoldt, on a déjà vu que $\mathcal{T}_K^S \simeq (\mathcal{T}_L^S)^G$. De plus, $\mathcal{X}_L^S$ possède les propriétés d'une « formation de classes », i.e. $\mathcal{X}_K^S \simeq (\mathcal{X}_L^S)^G$ et $H^1(G,\mathcal{X}_L^S) = 1$ ([N3, thm. 1.4] ; [N4, lemme 1.3]). On en déduit immédiatement l'isomorphisme cherché. $\square$

Le lemme 3.1 permet de décrire explicitement $H^1(G,\mathcal{T}_L^S)$ en utilisant le « logarithme de Gras » ([G3, III.2.2]) dès lors qu'on a des renseignements suffisants sur les groupes de classes et d'unités de L. Donnons quelques précisions. Si G *est cyclique d'ordre* p, le théorème classique de Reiner permet de décomposer le $\mathbb{Z}_pG$-module $\widetilde{\mathcal{X}_L}$ en somme directe de $\mathbb{Z}_pG$-modules indécomposables, unique à isomorphisme près : $\widetilde{\mathcal{X}_L} \simeq \mathbb{Z}_pG^a \oplus IG^b \oplus \mathbb{Z}_p^c$, où IG désigne l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbb{Z}_pG$. En adaptant (légèrement) les démonstrations du théorème 3.1 de [G2] et de la proposition 3.4 de [N4], on peut calculer a, b et c. Mais pour expliciter ρ_S, ce qui manque, c'est de savoir reconnaître quels sous-modules « arithmétiques » de $\widetilde{\mathcal{X}_L}$ sont isomorphes à ceux qui apparaissent dans la décomposition de Reiner.

Inversement, on peut déterminer $\widetilde{\mathcal{X}_L}$ par exemple en tuant $H^1(G,\mathcal{T}_L^S)$ (voir la signification arithmétique d'une telle brutalité dans la section 3.2 ci-dessous). Comme G est cyclique et $\mathcal{T}_L^S$ est fini, $H^1(G,\mathcal{T}_L^S) = 1$ équivaut à $H^2(G,\mathcal{T}_L^S) = 1$, ou encore à $\mathcal{T}_K^S \subset N\mathcal{T}_L^S$, où N désigne la norme de L/K. Or, d'après le corps de classes, $\mathcal{T}_K^S \subset N\mathcal{X}_L^S$ si et seulement si L/K est $\mathbb{Z}_p$-plongeable (voir e.g. [N4, prop 1.1]). On va ainsi pouvoir préciser la décomposition de Reiner en termes de théorie d'Iwasawa, en considérant L comme le premier étage d'une $\mathbb{Z}_p$-extension de K, soit $L_\infty = \cup_n L_n$. Si $\mathcal{X}_\infty^S$ est la limite projective des $\mathcal{X}_{L_n}^S$, le théorème de structure dit que le quotient sans Λ-torsion de $\mathcal{X}_\infty^S$ s'injecte dans Λ^{r_2}, avec un conoyau fini Φ (on sait en fait que Φ est un invariant de L_∞/K ; voir les préliminaires au lemme 3.15 ci-dessous). Alors :

***Proposition 3.2* (à comparer à** [G1, thm 5.7]**).** — *Dans les hypothèses du théorème 2.2,* $H^1(G,\mathcal{T}_L^s) = 1$ *si et seulement si* L/K *est* $\mathbb{Z}_p$*-plongeable et* $\widetilde{\mathcal{X}_L} \simeq \mathbb{Z}_p^{r_2} \oplus \mathbb{Z}_p$*, où* r_2 *désigne le nombre de paires de plongements complexes de* K*. En particulier, la trivialité de* Φ *implique celle de* $H^1(G,\mathcal{T}_L^s)$*, ainsi que l'isomorphisme* $\mathcal{X}_L^S \simeq \mathbb{Z}_pG^{r_2} \oplus \mathcal{T}_L^S \oplus \mathbb{Z}_p$.

Démonstration. — D'après [N4, prop. 2.2], la G-cohomologie de $\mathcal{T}_L^S$ est isomorphe à celle de Φ^{Γ_1}, en posant $\Gamma_1 = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$, et d'après [N4, prop 3.2], le nombre maximal de copies de $\mathbb{Z}_pG$ qui sont facteurs directs de $\mathcal{X}_L^S$ est égal à $r_2 - \dim H^1(G,\Phi^{\Gamma_1})$ où dim désigne la dimension d'un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. La trivialité de $H^1(G,\mathcal{T}_L^s)$ équivaut donc à ce que $\mathbb{Z}_pG^{r_2}$ est facteur direct de $\mathcal{X}_L^S$, ce qu'on peut écrire $\mathcal{X}_L^S \simeq \mathbb{Z}_pG^{r_2} \oplus \mathcal{Y}_L^S$ où $\mathcal{Y}_L^S$est de $\mathbb{Z}_p$-rang 1 d'après la conjecture de Leopoldt pour L. Puisque $\mathcal{X}_L^S$ et $\mathcal{Y}_L^S$ ont même $\mathbb{Z}_p$-torsion, il s'ensuit que $\widetilde{\mathcal{X}_L} \simeq \mathbb{Z}_pG^{r_2} \oplus \mathbb{Z}_p$; réciproquement, une telle décomposition de $\widetilde{\mathcal{X}_L}$ permet de relever dans $\mathcal{X}_L^S$ le facteur libre $\mathbb{Z}_pG^{r_2}$. Cas particulier : la trivialité de Φ entraîne celle de $H^1(G,\mathcal{T}_L^S)$, ainsi que la décomposition $\mathcal{X}_L^S \simeq \mathbb{Z}_pG^{r_2} \oplus \mathcal{T}_L^S \oplus \mathbb{Z}_p$ ([N4, coroll. 2.4]). $\square$

3.2. Primitivité. — Pour faire le lien avec la section 5.1 de [G1], examinons rapidement ce qui se passe, sous les mêmes hypothèses de S-ramification, pour les modules $\mathcal{W}_K$, $\mathcal{T}_K$, etc. relatifs à S_p. Dans le diagramme commutatif

(5)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & (\mathcal{W}_L)^G \arrow[r] & (\mathcal{T}_L)^G \arrow[r] & (\mathcal{BP}_L)^G \arrow[r, "\theta"] & H^1(G,\mathcal{W}_L) \arrow[r, "\rho"] & H^1(G,\mathcal{T}_L) \\
1 \arrow[r] & \mathcal{W}_K \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{T}_K \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{BP}_K \arrow[r] \arrow[u, "j_{L/K}"'] & 1 &
\end{tikzcd}$$

la flèche verticale du milieu est injective (sous Leopoldt) mais n'est plus un isomorphisme. Une chasse dans (5) donne immédiatement une suite exacte

$$1 \to \operatorname{Ker} j_{L/K} \to \mathcal{W}_L^G/\mathcal{W}_K \to {\mathcal{T}_L}^G/\mathcal{T}_K \to \operatorname{Coker} j_{L/K} \to \operatorname{Im}\theta \to 1,$$

d'où l'on tire, en notant ψ et ν les analogues de ψ_S et ν_S, $\mathcal{W}_L^G/\mathcal{W}_K \simeq \operatorname{Im}\psi$ et $q_{L/K} = (|\operatorname{Im}\theta|/|\operatorname{Im}\psi|)\cdot(|{\mathcal{T}_L}^G|/|\mathcal{T}_K|) = (|\operatorname{Ker}\rho|/|\operatorname{Ker}\nu|)\cdot(|{\mathcal{T}_L}^G|/|\mathcal{T}_K|)$ ([G1, formule (3)] ; voir aussi la section 3.1).

Il reste à comparer plus précisément les deux expressions de $q_{L/K}$ fournies par les diagrammes (1) et (5), ce qui revient à préciser la dépendance de ce quotient par rapport à l'ensemble S de places de K contenant S_p. On rappelle que l'extension L/K est supposée S-ramifiée et que l'indice S_p est sous-entendu quand $S = S_p$. Pour toute place v de K dans S, on choisit une place arbitraire w de L au-dessus de v, et l'on note $\widetilde{K_v^*}$ (resp. $\widetilde{L_w^*}$) le quotient $\mathbb{Z}_p$-libre du pro-p-complété de K_v^* (resp. L_w^*). Posons $T = S\backslash S_p$ ainsi que $W_L^T = \oplus_{w\in T}\,\mu(L_w)$, de sorte qu'on a une suite exacte $1 \to W_L^T \to \mathcal{W}_L^S \to \mathcal{W}_L \to 1$. Alors, par le corps de classes local et l'analogue local du lemme 3.1, on a $H^1(G_v,\mu(L_w)) \simeq \widetilde{L_w^*}^{G_v}/\widetilde{K_v^*}$, où $G_v = \operatorname{Gal}(L_w/K_v)$. Le résultat suivant est une interprétation fonctorielle de la formule des points fixes de G. Gras ([G3, thm. III.4.1.5 et thm. IV.3.3]) :

Proposition 3.3. — *Pour $v \in T$, notons e_v l'indice de ramification de L_w/K_v et φ_v l'automorphisme de Frobenius en v dans $\widetilde{\mathcal{X}}_L$. On a une suite exacte canonique*

$$1 \to {\mathcal{T}_L}^G/\mathcal{T}_K \to \oplus_{v\,\in T}\widetilde{L_w^*}^{G_v}/\widetilde{K_v^*} \xrightarrow{r_T} H^1(G,\mathcal{T}_L^S) \simeq \widetilde{\mathcal{X}}_L^G/\widetilde{\mathcal{X}}_K,$$

où l'image de r_T est engendrée par les classes modulo $\widetilde{\mathcal{X}}_K$ des éléments φ_v^{1/e_v}. En particulier, $\operatorname{Ker} r_T \simeq {\mathcal{T}_L}^G/\mathcal{T}_K$.

Démonstration. — C'est l'appendice de [MN]. Redonnons-en une démonstration rapide pour la commodité du lecteur. Il résulte facilement du corps de classes et de la conjecture de Leopoldt (voir e.g. [MN, lemme 2.5]) que les modules $\mathcal{T}_L$ et $\mathcal{T}_L^S$ sont reliés par la suite exacte $1 \to W_L^T \to \mathcal{T}_L^S \to \mathcal{T}_L \to 1$, d'où la suite exacte de cohomologie $1 \to (W_L^T)^G \simeq W_K^T \to (\mathcal{T}_L^S)^G \simeq \mathcal{T}_K^S \to {\mathcal{T}_L}^G \to H^1(G,W_L^T) \to H^1(G,\mathcal{T}_L^S)$, qu'on peut encore écrire sous la forme $1 \to {\mathcal{T}_L}^G/\mathcal{T}_K \to H^1(G,W_L^T) \xrightarrow{r_T} H^1(G,\mathcal{T}_L^S)$. Or $H^1(G,W_L^T) \simeq \oplus_{v\in T}H^1(G_v,\mu(L_w))$ d'après le lemme de Shapiro, et il suffit d'appliquer l'analogue local du lemme 3.1 pour conclure. □

Rappelons que l'ensemble de places S de K est appelé *primitif* (pour K et p) si les morphismes de Frobenius φ_v, pour $v \in S \setminus S_p$, engendrent un $\mathbb{Z}_p$-facteur direct libre de $\widetilde{\mathcal{X}_K}$, de rang égal à $|T|$ (voir [G3], [MN]). Par convention, S_p est primitif. En notant $\sum$ la réunion de S_p et des places de K qui se ramifient dans L/K, on dit que l'extension L/K est *primitivement ramifiée* si $\sum$ est primitif. En appliquant la proposition 3.3 ou la formule des points fixes de G. Gras avec $S = \sum$, on voit facilement que $\mathcal{T}_K \simeq {\mathcal{T}_L}^G$ si et seulement si l'extension L/K est primitivement ramifiée. Alors :

Corollaire 3.4. — *L'extension L/K est primitivement ramifiée si et seulement si les morphismes naturels $\operatorname{Im}\psi_S \to \operatorname{Im}\psi$ et $\operatorname{Im}\theta_S \to \operatorname{Im}\theta$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Si $\operatorname{Im}\psi \simeq \operatorname{Im}\psi_S$ et $\operatorname{Im}\theta \simeq \operatorname{Im}\theta_S$, les deux expressions de $q_{L/K}$ obtenues au début de la section 3.1 montrent que $\mathcal{T}_K \simeq {\mathcal{T}_L}^G$. Réciproquement, si $\mathcal{T}_K \simeq {\mathcal{T}_L}^G$, la suite exacte obtenue à partir du diagramme (5) au début de la section 3.1 montre que $\operatorname{Ker} j_{L/K} \simeq \mathcal{W}_L^G/\mathcal{W}_K \simeq \operatorname{Im}\psi$ et $\operatorname{Coker} j_{L/K} \simeq \operatorname{Im}\theta$. Or $\operatorname{Ker} j_{L/K} \simeq \operatorname{Im}\psi_S$ et $\operatorname{Coker} j_{L/K} \simeq \operatorname{Im}\theta_S$ en toute généralité. □

3.3. Sur l'intégalité de $q_{L/K}$. — À ce stade, faisons le point sur le problème de l'intégralité du quotient $q_{L/K} = |\mathcal{BP}_L^G|/|\mathcal{BP}_K| = |\operatorname{Coker} j_{L/K}|/|\operatorname{Ker} j_{L/K}|$. Si $\mu(L)$ est trivial, la question ne se pose pas. *Supposons que G est d'ordre p.* Alors $\operatorname{Ker} j_{L/K}$ est au plus d'ordre p, et le corollaire 3.4 dit que, si S n'est pas primitif, $\operatorname{Coker} j_{L/K}$ est au moins d'ordre p, donc $q_{L/K}$ est entier. Si S est primitif, $|\operatorname{Coker} j_{L/K}|$ dépend seulement de la ramification dans S_p, ce qui est cohérent avec la remarque suivant le théorème 2.2. Il reste donc un seul cas à régler, celui où K contient μ_p, L/K est p-ramifiée et $|\operatorname{Ker} j_{L/K}| = p$ (voir les théorèmes 2.2 et 2.3). Pour abréger le vocabulaire, on dira qu'il s'agit du *cas exceptionnel*; alors $S = S_p$ (omis dans les notations). Dans le cas exceptionnel, l'intégralité de $q_{L/K}$ dépend de la nullité de $H^1(G, \mathcal{W}_L) \xrightarrow{\rho} H^1(G, \mathcal{T}_L)$ à cause du :

Lemme 3.5 **([G1, lemme 5.6]).** — *Dans les hypothèses du théorème 2.2, si $j_{L/K}$ n'est pas injectif (i.e. dans le cas exceptionnel), $H^1(G, \mathcal{W}_L) \simeq H^2(G, \mu(L))$. En particulier $H^1(G, \mathcal{W}_L)$ est d'ordre p, et la nullité de ρ équivaut à $\operatorname{Coker} j_{L/K} \simeq H^2(G, \mu(L))$ et entraîne $q_{L/K} = 1$.*

Démonstration. — On a vu que dans les hypothèses du théorème 2.2, si $j_{L/K}$ n'est pas injectif, toutes les extensions locales qui interviennent sont cyclotomiques, et donc $H^i(G, W_L) = 0$ pour $i = 1, 2$ (ce qui veut dire ici que W_L est G-cohomologiquement trivial), et la suite exacte définissant $\mathcal{W}_L$ donne par cohomologie $H^j(G, \mathcal{W}_L) \simeq H^{j+1}(G, \mu(L))$. Or $\operatorname{Coker} j_{L/K} \simeq \operatorname{Ker}\rho$. □

Le noyau de $\rho\colon H^1(G, \mathcal{W}_L) \to H^1(G, \mathcal{T}_L)$ est étudié dans le §5.3 de [G1] par une démarche effective qu'on peut résumer ainsi : le lemme 3.5 ci-dessus donne un isomorphisme explicite $\widehat{H}^0(G, \mu(L)) \simeq \widehat{H}^{-1}(G, \mathcal{W}_L)$ qui fournit un générateur spécifique de $H^1(G, \mathcal{W}_L)$; le lemme 3.1 donne un isomorphisme $H^1(G, \mathcal{T}_L) \simeq \widetilde{\mathcal{X}_L}^G/\widetilde{\mathcal{X}_K}$ où le quotient du second membre peut être effectivement décrit par le logarithme de Gras si l'on dispose de données suffisantes sur les groupes de classes et d'unités de L (comme déjà signalé au lemme 3.1). La complexité théorique de la torsion $\mathcal{T}_L$ fait qu'on préfère ici étudier l'image de θ, qu'on peut mieux approcher par des techniques de localisation et de plongement puisque $\mathcal{BP}_K$ est une obstruction locale-globale à un certain problème de plongement, comme signalé dans l'introduction.

Proposition 3.6. — *Dans le cas exceptionnel, le problème de plongement* $(L/K, \varepsilon)$*, admet une solution pour toute classe* ε *de* $H^2(G, \mu(L))$*, et la localisation* $loc_K \colon H^1(G_K^S, \mu_{p^\infty}) \to \oplus_{v \in S} H^1(G_{K_v}, \mu_{p_\infty})$ *induit une injection de* $\operatorname{Coker} j_{L/K}$ *dans* $H^2(G, \mu(L))$.

Démonstration. — On suppose donc, comme dans le théorème 2.2, que $\operatorname{Ker} j_{L/K}$ est d'ordre p et que l'extension L/K est kummerienne, non cyclotomique, mais localement cyclotomique partout, S_p-ramifiée. *On suspend momentanément la convention d'omettre la référence à* S_p car l'on aura besoin un peu plus loin de rester dans une situation générale (e.g. dans la proposition 3.10 ci-après). En utilisant la formulation cohomologique $\mathcal{BP}_K \simeq \operatorname{Ker}_S^1(K, \mu_{p^\infty}) := \operatorname{Ker}(H^1(G_K^S, \mu_{p^\infty}) \xrightarrow{loc_K} \oplus_{v \in S} H^1(K_v, \mu_{p^\infty}))$ et la suite spectrale de Hochschild-Serre, on peut écrire un diagramme commutatif aux lignes exactes, où loc'_L est la restriction de loc_L à $H^1(G_L^S, \mu_{p^\infty})^G$:

(6)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \operatorname{Ker} j_{L/K} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \operatorname{Ker}_S^1(K, \mu_{p^\infty}) \arrow[r, "j_{L/K}"] \arrow[d] & \operatorname{Ker}_S^1(L, \mu_{p^\infty})^G \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker} j_{L/K} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 1 \\
1 \arrow[r] & H^1(G, \mu(L)) \arrow[r, "inf_{L/K}"] & H^1(G_K^S, \mu_{p^\infty}) \arrow[r, "res_{L/K}"] \arrow[d, "loc_K"] & H^1(G_L^S, \mu_{p^\infty})^G \arrow[r, "trg_{L/K}"] \arrow[d, "loc'_L"] & \operatorname{Im} trg_{L/K} \arrow[r] & 1 \\
 & & \oplus_{v \in S} H^1(G_{K_v}, \mu_{p^\infty}) \arrow[r, "\simeq"] & \left(\oplus_{v \in S} H^1(G_{L_w}, \mu_{p^\infty})\right)^G . & &
\end{tikzcd}$$

Explications : par hypothèse, la première flèche verticale est une égalité, et par définition, les deux suivantes sont injectives ; la ligne du bas est la version semi-locale de celle du milieu, mais l'hypothèse que L/K est localement cyclotomique, avec les notations adoptées depuis le début, entraîne que pour toute place w au-dessus de v dans S, le module $\mu(L_w)$ est cohomologiquement trivial pour l'action de $\operatorname{Gal}(L_w/K_v)$ et par suite que la restriction semi-locale $\oplus_{v \in S} H^1(G_{K_v}, \mu_{p^\infty}) \to \left(\oplus_{v \in S} H^1(G_{L_w}, \mu_{p^\infty})\right)^G$ est un isomorphisme.

(i) Montrons d'abord que la transgression $H^1(G_L^S, \mu_{p^\infty})^G \xrightarrow{trg_{L/K}} H^2(G, \mu(L))$ dans (6) est surjective. On fera appel pour cela aux techniques du problème de plongement galoisien à noyau abélien (voir e.g. [H], [K]). Rappelons seulement que si A est un G-module, pour toute classe $\varepsilon \in H^2(G, A)$ le problème de plongement $(L/K, \varepsilon)$ consiste à trouver une sur-extension $M/L/K$ galoisienne telle que $\operatorname{Gal}(M/L) \simeq A$ et que l'extension de groupes $1 \to A \to \operatorname{Gal}(M/K) \to G \to 1$ soit décrite par ε. Ici, $A = \mu(L) = \mu(K) = \mu_q$, et l'on impose qu'en outre toutes les extensions concernées soient S-ramifiées. Comme G est cyclique d'ordre p, il en est de même de $H^2(G, \mu_q)$. En outre, l'action de G sur μ_q étant triviale, tous les groupes de Galois cherchés $\operatorname{Gal}(M/K)$ sont abéliens de degré pq, soit de type (p, q) (correspondant à $\varepsilon = 0$), soit cycliques (correspondant à $\varepsilon \neq 0$). Or le critère de Hoechsmann (op. cit.) assure que le problème de plongement $(L/K, \varepsilon)$ possède une solution si et seulement si $\varepsilon \in \operatorname{Im} \tau_{L/K}$, où $\tau_{L/K}$ est la transgression $H^1(G_L^S, \mu_q)^G \to H^2(G, \mu_q)$, qu'on peut décrire comme suit dans la situation kummerienne (voir [N5, §4.1]). Soit $M = L(\sqrt[q]{\beta})$, avec $\beta \in L^*$. On sait que L dépend seulement de la classe $\beta \bmod L^{*q} \in L^*/L^{*q}$, et que l'extension M/K est galoisienne si et seulement si $\beta \bmod L^{*q} \in (L^*/L^{*q})^G$. Les suites exactes naturelles $\cdots \to K^*/K^{*q} \to (L^*/L^{*q})^G \xrightarrow{\delta_0} H^1(G, L^{*q}) \to H^1(G, L^*) = 1$

et $1 \to H^1(G, L^{*q}) \xrightarrow{\delta_1} H^2(G, \mu_q) \to H^2(G, L^*) \to \cdots$ permettent d'identifier $\tau_{L/K}$ avec le composé $\delta_1\delta_0$. Comme G est cyclique, on en déduit que $\operatorname{Im}\tau_{L/K} \simeq (\mu_q \cap N(L^*))/N(\mu_q)$, où N désigne la norme de L/K. Mais l'hypothèse que L/K est localement cyclotomique entraîne que μ_q est une norme locale partout, et donc, par le principe normique de Hasse, que $\mu_q \subset N(L^*)$ et $\operatorname{Im}\tau_{L/K}$ est d'ordre p, autrement dit $\operatorname{Im}\tau_{L/K} \simeq H^2(G, \mu_q)$.
Il reste seulement à comparer les deux transgressions $\tau_{L/K}$ et $trg_{L/K}$. Examinons pour cela la restriction $H^1(G_K^S, \mu_{p^\infty})[q] \to H^1(G_L^S, \mu_{p^\infty})^G[q]$. Commençons par un résultat purement algébrique :

Sous-lemme 3.7. — *Dans la situation kummerienne ci-dessus, posons* $\mathcal{K} = K(\sqrt[q]{\mu_q})$ *et* $\Delta = \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/K)$. *On a un isomorphisme naturel* $\vartheta_{\mathcal{K}/K}$ *de* $H^1(G_K^S, \mu_{p^\infty})[q]$ *sur l'image de la restriction* $H^1(G_K^S, \mu_q) \to H^1(G_{\mathcal{K}}^S, \mu_q)^\Delta$.

Démonstration du sous-lemme. — La suite exacte de G_K^S-modules $1 \to \mu_q \to \mu_{p^\infty} \xrightarrow{q} \mu_{p^\infty} \to 1$ donne par cohomologie une suite exacte

$$1 \to \mu(K)/\mu(K)^q \simeq \mu_q \xrightarrow{\delta_K} H^1(G_K^S, \mu_q) \to H^1(G_K^S, \mu_{p^\infty})[q] \to 1,$$

où l'application cobord δ_K est ainsi décrite : si ζ est un générateur de $\mu(K)$, $\delta_K(\zeta)$ est la classe du 1-cocycle $(\sigma \mapsto \sigma(\sqrt[q]{\zeta})/\sqrt[q]{\zeta})$. Donc, par la théorie de Kummer, $\operatorname{Im}\delta_K = H^1(\Delta, \mu_q) \hookrightarrow H^1(G_K^S, \mu_q)$. La suite exacte d'inflation restriction

$$1 \to H^1(\Delta, \mu_q) \to H^1(G_K^S, \mu_q) \to H^1(G_{\mathcal{K}}^S, \mu_q)^\Delta$$

induit alors l'isomorphisme $\vartheta_{\mathcal{K}/K}$ cherché. □

Introduisons les deux extensions $\mathcal{K} = K(\sqrt[q]{\mu_q})$ et $\mathcal{L} = L(\sqrt[q]{\mu_q})$, qui vérifient $G \simeq \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/\mathcal{K})$ puisque L/K n'est pas globalement cyclotomique. Or le sous-lemme donne deux isomorphismes $\vartheta_{\mathcal{K}/K}$ et $\vartheta_{\mathcal{L}/L}$ dont on vérifie directement, à partir des définitions, qu'ils satisfont à la relation $res_{\mathcal{L}/\mathcal{K}} \circ \vartheta_{\mathcal{K}/K} = \vartheta_{\mathcal{L}/K} \circ res_{L/K}$. Cela permet d'identifier $\tau_{\mathcal{L}/\mathcal{K}} \colon H^1(G_{\mathcal{L}}^S, \mu_q)^G \to H^2(G, \mu_q)$ à la restriction de $trg_{L/K}$ à $H^1(G_L^S, \mu_{p^\infty})^G[q]$. Les mêmes arguments qu'au début de (i), en remplaçant K et L par $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$, montrent alors la surjectivité de $\tau_{\mathcal{L}/\mathcal{K}}$.

NB : Le résultat du sous-lemme reste bien sûr valable pour les groupes de Galois absolus locaux G_{K_v} et $G_{\mathcal{K}_v}$. Mais il faut prendre garde que pour certaines places v de S, $\mu(K_v)$ peut être plus gros que $\mu(K)$, ce qui empêche d'accéder à $\operatorname{Coker} j_{L/K}$ de manière aussi directe qu'à la section 2 avec $\operatorname{Ker} j_{L/K}$.

(ii) Montrons ensuite l'injectivité de f. Pour cela, on peut couper chaque suite exacte longue en deux suites exactes courtes et faire la chasse dans les deux diagrammes ainsi obtenus à partir du diagramme (6) :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \operatorname{Ker} j_{L/K} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \operatorname{Ker}^1_S(K, \mu_{p^\infty}) \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 1 \\
1 \arrow[r] & H^1(G, \mu(L)) \arrow[r] & H^1(G_K^S, \mu_{p^\infty}) \arrow[r] & B \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \mathrm{Ker}^1_S(L,\mu_{p^\infty})^G & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\, j_{L/K} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 1 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^1(G_L^S,\mu_{p^\infty})^G & \longrightarrow & H^2(G,\mu(L)) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Le lemme du serpent montre, dans le premier diagramme, que $\mathrm{Ker}\, g$ est trivial et $\mathrm{Im}\, loc_K \simeq \mathrm{Coker}\, g$; dans le second, qu'on a une suite exacte $1 \to \mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Coker}\, g \to \mathrm{Im}\, loc'_L \to \mathrm{Coker}\, f \to 1$.
Les isomorphismes $\mathrm{Coker}\, g \simeq \mathrm{Im}\, loc_K$ et $\oplus_{v\in S} H^1(G_{K_v},\mu_{p^\infty}) \simeq (\oplus_{v\in S} H^1(G_{L_w},\mu_{p^\infty}))^G$ entraînent l'injectivité de la flèche $\mathrm{Coker}\, g \to \mathrm{Im}\, loc'_L$, donc la trivialité de $\mathrm{Ker}\, f$. □

La surjectivité ou non de f (donc l'intégralité de $q_{L/K}$ dans le cas exceptionnel) est caractérisée par le

Corollaire 3.8. — *Gardons les hypothèses et les notations du cas exceptionnel. Alors le conoyau* $\mathrm{Coker}\, j_{L/K}$ *est trivial si et seulement si, pour aucune sur-extension cyclique $M/L/K$ de degré pq, p-ramifiée, l'extension M/L n'est localement cyclotomique partout.*

Démonstration. — Rappelons qu'ici L/K est p-ramifiée et $S = S_p$. D'après l'injectivité de f, la trivialité de $\mathrm{Coker}\, j_{L/K}$ équivaut à celle de $\mathrm{Im}\, f$. Considérons une sur-extension cyclique $M/L/K$, solution d'un problème de plongement $(L/K,\varepsilon)$ correspondant à une classe ε non nulle de $H^2(G,\mu_q)$. Or, $\varepsilon \in \mathrm{Im}\, f$ si et seulement si M/L est localement cyclotomique partout. En effet, écrivons M sous la forme $L(\sqrt[q]{\beta})$, avec $\beta \mod L^{*q} \in (L^*/L^{*q})^G$. Le diagramme (6) et la partie (i) de la preuve de la proposition 3.6 montrent que $\varepsilon \in \mathrm{Im}\, f$ si et seulement si $\beta \mod L^{*q} \in \mathrm{Ker}^1_S(L,\mu_{p^\infty})[q]$, et la scolie 2.4 appliquée à M/L montre que $\beta \bmod L^{*q} \in \mathrm{Ker}^1_S(L,\mu_{p^\infty})[q]$ si et seulement si M/L est localement cyclotomique partout. □

Exemple d'application. Toujours dans le cas exceptionnel, notons A_K le p-groupe des S_p-classes de K, et pareillement pour A_L. La norme des classes d'idéaux se factorise à travers $(A_L)_G \to A_K$, où $(\cdot)_G$ désigne les co-invariants par G. *Supposons que* $\mathrm{Ker}((A_L/q)_G \to A_K/q)$ *contient un élément d'ordre q* (voir à ce sujet le lemme 3.12). Cet élément correspond par le corps de classes à une extension M/L cyclique de degré q qui est p-ramifiée et totalement p-décomposée, donc localement cyclotomique partout. De plus, par construction, l'extension M/K est abélienne non scindée, donc cyclique. Le corollaire 3.8 dit alors que $q_{L/K} = 1$.

Les résultats précédemment obtenus dans le cas exceptionnel peuvent commodément se résumer en termes de modules d'Iwasawa (ou de classes logarithmiques suivant la terminologie de [J2]).

Notations. Rappelons que $K_\infty = K(\mu_{p^\infty})$ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K avec $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, et $X_\infty(K)$ le groupe de Galois sur K_∞ de la pro-p-extension abélienne maximale de K_∞ qui est partout totalement décomposée. Dans les tours cyclotomiques K_∞/K et L_∞/L, on a un morphisme de co-descente $(X_\infty(L))_G \to X_\infty(K)$, et le morphisme dual $\mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty(K),\mu_{p^\infty}) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty(L),\mu_{p^\infty})^G$, comme G opère trivialement sur μ_{p^∞}, n'est autre que $j_{L/K}\colon \mathrm{Ker}^1_S(K,\mu_{p^\infty}) \to \mathrm{Ker}^1_S(L,\mu_{p^\infty})^G$. Désignons par K_{lc} l'extension abélienne maximale de K qui est localement cyclotomique partout, de sorte que $\widetilde{A}_K := \mathrm{Gal}(K_{lc}/K_\infty) \simeq X_\infty(K)_\Gamma$.

Théorème 3.9. — *Dans le cas exceptionnel, on a $q_{L/K} = p^{-\varepsilon}$, $\varepsilon = 0$ ou 1, avec $\varepsilon = 1$ si et seulement si la co-descente naturelle $(\widetilde{A}_L/q)_G \to \widetilde{A}_K/q$ est injective (rappelons que $\mu(L) = \mu(K) = \mu_q$).*

Démonstration. — C'est une simple ré-interprétation du corollaire 3.8. Avec les mêmes hypothèses et la même démonstration que dans la proposition 3.6, on peut identifier Coker $j_{L/K}$ au dual kummerien de $\mathrm{Ker}((\widetilde{A}_L/q)_G \to \widetilde{A}_K/q)$, et la nullité de ce dual signifie exactement que toute solution $M/L/K$ du problème de plongement étudié doit être scindée. □

Le problème initial se ramène ainsi à une question de théorie des genres pour les « classes logarithmiques ». Notons que la plus grande précision du théorème 3.9 par rapport à l'exemple qui suit le corollaire 3.8 peut s'expliquer ainsi : sous les hypothèses du cas exceptionnel, les extensions L/K et K_∞/K sont linéairement disjointes, donc $\widetilde{A}_K$ se surjecte sur A_K, mais avec un noyau en général non nul. Voir à ce propos les préliminaires du lemme 3.15 ci-après.

Dans la situation de la proposition 3.6, on peut reprendre la même démarche et faire la chasse dans les diagrammes sans ajouter d'hypothèse, pour obtenir une « formule des classes ambiges » donnant $q_{L/K}$ même dans le cas exceptionnel, et même si certains paramètres qui vont apparaître ne seront pas très éclairants. En confondant dans une extension locale l'inflation $H^1(L_w/K_v, \mu(L_w)) \to H^1(G_{K_v}, \mu_{p^\infty})$ avec une inclusion, on a la généralisation suivante de la proposition 3.6 :

Proposition 3.10. — *On reprend les hypothèses du théorème 2.2, en supposant seulement que $\mu(K) = \mu(L)$ (et donc on n'est plus forcément dans le cas exceptionnel). Le quotient $q_{L/K}$ est égal à $|\,\mathrm{Im}\, loc_K \cap \oplus_{v\in S} H^1(L_w/K_v, \mu(L_w))| \cdot p^{-\varepsilon}$, avec $\varepsilon = 0$ ou 1. Le cas où $\varepsilon = 1$ se produit précisément quand : soit L/K ne se plonge dans aucune sur-extension cyclique $M/L/K$ de degré pq, S-ramifiée ; soit L/K se plonge dans de telles sur-extensions, mais aucune M/L n'est localement cyclotomique partout.*

Démonstration. — On a déjà noté au début de la section 2.3 que si L/K est cyclotomique, $\mathcal{BP}_K \simeq {\mathcal{BP}_L}^G$, et donc ce cas peut être écarté sans problème. Dans tous les cas (exceptionnel ou non), on peut extraire de (6) le diagramme commutatif suivant, où les notations sont celles de la partie (ii) de la preuve de la proposition 3.6 :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{BP}_L^G \arrow[r] & H^1(G_L^S, \mu_{p^\infty})^G \arrow[r] & \mathrm{Im}\, loc'_L \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{BP}_K \arrow[r] \arrow[u, "j_{L/K}"] & H^1(G_K^S, \mu_{p^\infty}) \arrow[r] \arrow[u, "res_{L/K}"] & \mathrm{Im}\, loc_K \arrow[r] \arrow[u, "h"] & 1.
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent donne une suite exacte de modules finis $1 \to \mathrm{Ker}\, j_{L/K} \to H^1(G, \mu(L)) \to \mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Im}\, loc_K \cap \oplus_{v\in S} H^1(L_w/K_v, \mu(L_w)) \to \mathrm{Coker}\, j_{L/K} \xrightarrow{f} \mathrm{Im}\, trg_{L/K} \to \mathrm{Coker}\, h \to 1$, où le morphisme f est le même que dans le diagramme (6) et, dans l'expression de $\mathrm{Ker}\, h$, on a assimilé l'inflation semi-locale à une inclusion. En faisant le produit alterné des ordres, on obtient $q_{L/K} = (|\,\mathrm{Ker}\, h|/|\,\mathrm{Coker}\, h|)/(|H^1(G, \mu(L))|/|\,\mathrm{Im}\, trg_{L/K}|)$. Examinons divers cas suivant la nullité ou non de $\mathrm{Im}\, trg_{L/K}$:

(a) Si cette image est triviale (ce qui entraîne aussi la trivialité de $\mathrm{Coker}\, h$), $q_{L/K} = |\,\mathrm{Ker}\, h|/p$;

(b) Si elle est non triviale, elle coïncide avec $H^2(G,\mu(L))$, d'où $q_{L/K} = |\operatorname{Ker} h|/|\operatorname{Coker} h|$. Deux sous-cas se présentent : si la flèche f n'est pas nulle, $\operatorname{Coker} h$ est trivial et $q_{L/K} = |\operatorname{Ker} h|$; si f est nulle, $\operatorname{Coker} h$ est d'ordre p et $q_{L/K} = |\operatorname{Ker} h|/p$.

Il reste à traduire les conditions du cas (b), $\operatorname{Im} trg_{L/K} \neq 0$ et $f = 0$. Or l'on a vu que la première condition équivaut à la solvabilité d'un problème de plongement associé à un générateur de $H^2(G,\mu(L))$, et la nullité de f a été caractérisée dans le corollaire 3.8 (où il suffit de remplacer S_p par S). □

Remarque. Pour faire intervenir des indices de réseaux comme dans la formule classique des classes ambiges, on peut transformer l'expression de $\operatorname{Im} loc_K$ de la manière suivante : en notant $(\cdot)^\vee$ le dual de Pontryagin, la dualité de Poitou-Tate donne $\operatorname{Im} loc_K \simeq (\operatorname{Coker} \lambda_K)^\vee$, où λ_K est le morphisme naturel $\operatorname{Hom}(\mathcal{X}_K^S, \mathbb{Z}_p) \to \oplus_{v\in S} \operatorname{Hom}(\mathcal{X}_{K_v}, \mathbb{Z}_p)$, et $\mathcal{X}_{K_v} = G_{K_v}^{ab}$ est isomorphe au pro-p-complété de K_v^*. Notons que la théorie globale-locale du groupe de Brauer assure l'injectivité de λ_K.

Complément 3.11. — En lien avec [J1] et dans la situation générale du début de la section 3, examinons le morphisme de capitulation $\mathcal{J}_{L/K} \colon \mathcal{C}_K \to {\mathcal{C}_L}^G$, en rappelant que $\mathcal{C}_K$ est le module $\operatorname{Gal}(BP_K/K)$, dont $\mathcal{BP}_K$ est la $\mathbb{Z}_p$-torsion. On a un diagramme commutatif analogue au diagramme (1), mais plus simple grâce aux propriétés de formations de classes résultant de la conjecture de Leopoldt (voir les rappels du lemme 3.1) :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & (\mathcal{W}_L^S)^G \arrow[r] & (\mathcal{X}_L^S)^G \arrow[r] & (\mathcal{C}_L)^G \arrow[r] & H^1(G,\mathcal{W}_L^S) \arrow[r] & H^1(G,\mathcal{X}_L^S) = 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{W}_K^S \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{X}_K^S \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"'] & \mathcal{C}_K \arrow[r] \arrow[u, "\mathcal{J}_{L/K}"'] & 1. &
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} \mathcal{J}_{L/K} \simeq \operatorname{Ker} j_{L/K} \simeq (\mathcal{W}_L^S)^G/\mathcal{W}_K^S \hookrightarrow H^1(G,\mu(L))$ et $\operatorname{Coker} \mathcal{J}_{L/K} \simeq H^1(G,\mathcal{W}_L^S)$.
En particulier, dans le cas exceptionnel, on a $\operatorname{Ker} \mathcal{J}_{L/K} \simeq H^1(G,\mu(L))$ et $\operatorname{Coker} \mathcal{J}_{L/K} \simeq H^2(G,\mu(L))$ ([J1, thm. 1.6]), et l'on peut se demander si le morphisme naturel $\operatorname{Coker} j_{L/K} \to \operatorname{Coker} \mathcal{J}_{L/K}$ coïncide ou non avec $f\colon \operatorname{Coker} j_{L/K} \to H^2(G,\mu(L))$ de la démonstration de la proposition 3.6. En introduisant la suite exacte tautologique $1 \to \mathcal{BP}_L \to \mathcal{C}_L \to \widetilde{\mathcal{C}}_L \to 1$ et le morphisme naturel $h_{L/K} \colon \widetilde{\mathcal{C}}_L \to \widetilde{\mathcal{C}}_L^G$, les mêmes raisonnements que dans la section 2.1 (ii) et le lemme 3.1 donnent un isomorphisme $\operatorname{Coker} h_{L/K} \simeq \operatorname{Ker}(H^1(G,\mathcal{BP}_L) \to H^1(G,\widetilde{\mathcal{C}}_L))$, ainsi qu'une suite exacte $1 \to \operatorname{Ker} h_{L/K} \to \operatorname{Coker} j_{L/K} \to \operatorname{Coker} \mathcal{J}_{L/K} \to 1$. Cette dernière montre, d'après le théorème 3.9, qu'il n'y a pas en général coïncidence, et donc $\operatorname{Coker} j_{L/K}$ ne peut pas être atteint simplement par des manipulations abstraites d'algèbre homologique, sans intervention de la S-ramification.

3.4. Approche asymptotique. — Dans une p-extension L/K, il serait intéressant d'estimer plus ou moins explicitement la taille de $\operatorname{Coker} j_{L/K}$ indépendamment du problème de l'intégralité de $q_{L/K}$ (et donc indépendamment de la taille de $\operatorname{Ker} j_{L/K}$). En supposant que L vérifie la conjecture de Leopoldt et G est un p-groupe, donnons quelques conditions de *type asymptotique* en théorie d'Iwasawa pour que $\operatorname{Coker} j_{L/K}$ soit trivial. Puisque le module de Bertrandias-Payan lui-même possède une description de nature asymptotique, c'est au fond une démarche naturelle, et qu'on a déjà appliquée au théorème 3.9.

Revenons à la formulation cohomologique $\mathcal{BP}_K \simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty(K), \mu_{p^\infty}) \simeq \mathrm{Ker}^1_S(K, \mu_{p^\infty})$ (cf. (2)), où K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K et $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Comme remarqué au début de la section 2.3, on peut écarter d'office le cas où L/K est cyclotomique, et supposer désormais que L *est linéairement disjointe de* K_∞, et donc que $\mathrm{Gal}(L_\infty/K) \simeq \Gamma\times G$.

Pour une première description du conoyau de capitulation, on va faire intervenir la *théorie des genres* (à rapprocher du théorème 3.9). Pour toute extension E/F de degré fini, on note H_E^S le p-corps de S-classes de Hilbert de E, i.e. la p-extension abélienne non ramifiée maximale de E qui décompose totalement toutes les places de E dans S. Par la théorie du corps de classes, on a $\mathrm{Gal}(H_E^S/F) \simeq A_E^S$ qui est le p-groupe des S-classes d'idéaux de E , et $X_\infty(F) = \varprojlim_n A^S_{E_n}$ (indépendamment de S). On notera D_E^S le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(H_E^S/F)$ engendré par les groupes de décomposition de toutes les places de S.

Lemme 3.12 **([McS, lemma 6.1]).** — *Soit E/F une p-extension cyclique, S-ramifiée, de groupe de Galois $G = \langle s\rangle$. Le morphisme de co-descente $(A_E^S)_G \to A_F^S$ induit par la norme de E/F a pour image $\mathrm{Gal}(H_F^S/F \cap H_F^S)$ et pour noyau l'image dans $(A_E^S)_G$ du sous-groupe $A_E^S \cap D_E^S$. En particulier, ce morphisme est surjectif si et seulement si $E \cap H_F^S = F$, et il est injectif si S contient au plus une place qui ne se décompose pas totalement dans E/F.*

Or dans notre situation, en passant à la limite projective dans les tours cyclotomiques K_∞/K et L_∞/L, on a un morphisme de co-descente $(X_\infty(L))_G \to X_\infty(K)$ et comme G opère trivialement sur μ_{p^∞} le morphisme dual $\mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty(K), \mu_{p^\infty}) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty(L), \mu_{p^\infty})^G$ n'est autre que $j_{L/K}$, dont le noyau et le conoyau sont décrits par la :

Proposition 3.13. — *Soit L/K une p-extension S-ramifiée, de groupe de Galois G, vérifiant la conjecture de Leopoldt. Notons L_∞ et K_∞ les $\mathbb{Z}_p$-extensions cyclotomiques de L et K, H_{L_∞} et H_{K_∞} les pro-p-extensions abéliennes maximales de L_∞ et K_∞ qui sont totalement décomposées partout, avec $X_\infty(L) = \mathrm{Gal}(H_{L_\infty}/L_\infty)$, $X_\infty(K) = \mathrm{Gal}(H_{K_\infty}/K_\infty)$. On suppose en outre que L et K_∞ sont linéairement disjointes. Introduisons le « corps des genres » $H^g_{L_\infty}$, le sous-corps de L_∞ fixé par $IG(X_\infty(L))$ où IG est l'idéal d'augmentation de ΛG, avec $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$. Alors* $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(H_{K_\infty} \cap L_\infty/K_\infty), \mu_{p^\infty})$ *et* $\mathrm{Coker}\, j_{L/K} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(H^g_{L_\infty}/H_{K_\infty} \cdot L_\infty), \mu_{p^\infty})$.

Démonstration. — Comme L et K_∞ sont linéairement disjointes sur K, $G \simeq \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$. Notons D^S_∞ la limite projective des groupes $D^S_{L_n}$ le long de la tour $L_\infty = \cup L_n$. On vérifie facilement que le corps fixe de $X_\infty(L) \cap D^S_\infty$ n'est autre que le compositum $H_{K_\infty} \cdot L_\infty$, et qu'on a deux suites exactes $1 \to \mathrm{Gal}(H^g_{L_\infty}/H_{K_\infty} \cdot L_\infty) \to X_\infty(L)_G \to \mathrm{Gal}(H_{K_\infty} \cdot L_\infty/L_\infty) \to 1$ et $1 \to \mathrm{Gal}(H_{K_\infty} \cdot L_\infty/L_\infty) \to X_\infty(K) \to \mathrm{Gal}(H_{K_\infty} \cap L_\infty/K_\infty) \to 1$ (faire un dessin galoisien). Le résultat cherché s'en déduit par dualité. □

Corollaire 3.14. — *Supposons que L/K est cyclique, p-ramifiée, qu'il existe au plus une p-place de K qui ne se décompose pas totalement dans L, et qu'une telle place se ramifie totalement dans L_∞/L. Alors* $\mathrm{Coker}\, j_{L/K}$ *est trivial.*

Démonstration. — Les hypothèses du corollaire se propageant visiblement dans la tour cyclotomique, le lemme 3.12 montre l'injectivité de $(A_{L_n})_G \to A_{K_n}$ pour tout $n \geq 0$, donc, par passage à la limite et par dualité, la surjectivité de $j_{L/K} : \mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty(K), \mu_{p^\infty}) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(X_\infty(L), \mu_{p^\infty})^G$. □

Remarque. Si $j_{L/K}$ n'est pas injectif, ce résultat est cohérent avec le théorème 3.9. En effet, si K admet une seule p-place et si celle-ci est totalement ramifiée dans K_∞/K, on sait que $X_\infty(K)_{\Gamma_n} \simeq A_{K_n}$ pour tout n ([LMN, coroll. 1.6]), donc le module $\Psi(K)$ introduit dans le complément 2.6 (a) est trivial, et ces propriétés se propagent à L dans les hypothèses du corollaire ; de plus, puisque p se ramifie dans L/K, on a $(A_L)_G \twoheadrightarrow A_K$ ce qui équivaut à $(A_L/q)_G \twoheadrightarrow A_K/q$. Dans ces conditions, le critère du théorème 3.9 pour une extension kummerienne de degré p se lit : $\operatorname{Coker} j_{L/K}$ est trivial si et seulement si $(A_L/q)_G \to A_K/q$ est injectif, ou encore, si et seulement si $(A_L)_G \simeq A_K$, et les assertions du théorème 3.9 et du corollaire 3.14 deviennent équivalentes via le lemme 3.12. Cependant, puisque $\Psi(K) = 1$, (CGE) entraîne l'injectivité de $j_{L/K}$ d'après le complément 2.6. Donc le réel intérêt du corollaire 3.14 est en fait de couvrir un cas qui ne relève pas du théorème 3.9.

On se place maintenant dans la situation kummerienne (ce qui n'est pas une restriction puisque p est impair). Pour une seconde caractérisation de $\operatorname{Coker} j_{L/K}$, introduisons deux invariants asymptotiques $\Phi(L)$ et $\Psi(L)$ attachés à la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de L :

- Comme dans la proposition 3.2, on définit le Λ-module $\mathcal{X}_\infty^S = \varprojlim_n \mathcal{X}_{L_n}^S$, ainsi que le module fini $\Phi(L)$ qui est l'obstruction à la Λ-liberté du quotient sans Λ-torsion de $\mathcal{X}_\infty^S$. Si $X_\infty(L) = \operatorname{Gal}(H_{L_\infty}/L_\infty)$ comme dans la proposition 3.13, et si $X_\infty^\circ(L)$ est son sous-module fini maximal, on sait que $X_\infty^\circ(L)$ est isomorphe au noyau de capitulation asymptotique $\operatorname{Ker}(A_{L_n}^S \to (A_{L_\infty}^S)^{\Gamma_n}), n \gg 0$ et aussi que $\Phi(L) \simeq \operatorname{Hom}(X_\infty^\circ(L), \mu_{p^\infty})$ (voir e.g. les rappels de [LMN]).

- En supposant à partir de maintenant la validité asymptotique de la *conjecture de Kuz'min-Gross*, i.e. la finitude de $X_\infty(L)_{\Gamma_n}$ pour $n \gg 0$, on dispose de l'invariant *fini* $\Psi(L)$ introduit dans le complément 2.6 (a), et qui est isomorphe à $\operatorname{Ker}(X_\infty(L)_{\Gamma_n} \to A_{L_n}^S) \simeq \operatorname{Coker} A_{L_n}^S \to (A_{L_\infty}^S)^{\Gamma_n}$ pour $n \gg 0$ ([LMN, lemme 1.3 et thm. 1.4]). La description kummerienne de $\Psi(L)$ fait intervenir le module $\mathcal{BP}_\infty(L) := \varprojlim_n \mathcal{BP}_{L_n}$. Soit M_∞^S la pro-p-extension S-ramifiée abélienne maximale de L_∞ de sorte que $\mathcal{X}_\infty^S = \operatorname{Gal}(M_\infty^S/L_\infty)$ et soit T_∞ le sous-corps (qui est indépendant de S) fixé par la Λ-torsion $\mathcal{T}_\infty^S(L)$ de $\mathcal{X}_\infty^S$. Soit N_∞^S/L_∞ l'extension obtenue en ajoutant toutes les racines p-primaires des S-unités de L_∞, $Y_\infty(L) = \operatorname{Gal}(M_\infty^S/N_\infty^S)$ (indépendant de S). Notons $BP_{L_\infty} := \varinjlim_n BP_{L_n}$ le corps de Bertrandias-Payan au niveau infini, de sorte que $\mathcal{BP}_\infty(L) \simeq \operatorname{Gal}(BP_{L_\infty}/T_\infty)$.

Lemme 3.15 **(**[LMN, thm. 2.4 et 3.2]**).** — *Posons $\mathcal{W}_\infty^S(L) = \varprojlim_n \mathcal{W}_{L_n}^S$, $\mathcal{T}_\infty^S$ la Λ-torsion de $\mathcal{X}_\infty^S$ et $\Theta_\infty^S(L) = Y_\infty(L) \oplus \mathcal{W}_\infty^S(L)$. Alors $\Psi(L) \simeq \operatorname{Hom}(\operatorname{Gal}(BP_{L_\infty} \cap N_\infty^S), \mu_{p^\infty})$, et l'on a un diagramme commutatif de ΛG-modules aux lignes exactes :*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Theta_\infty^S(L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}_\infty^S(L) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(\Psi(L), \mu_{p^\infty}) \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & Y_\infty(L) \arrow[r] & \mathcal{BP}_\infty(L) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(\Psi(L), \mu_{p^\infty}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les projections naturelles (faire un dessin galoisien).

On peut maintenant donner une seconde approche asymptotique du conoyau de capitulation. Bien que la chasse dans les diagrammes reste ici praticable en général, on fera l'hypothèse simplificatrice que $\Psi(L)$ est nul (ce qui impose, si l'on croit (CGE), la trivialité de $\operatorname{Ker} j_{L/K}$ dans le cas de degré p) pour avoir un résultat agréable à énoncer.

Proposition 3.16. — *Soit L/K une p-extension S-ramifiée, de groupe de Galois G, telle que L vérifie la conjecture de Leopoldt et les étages L_n vérifient la conjecture de Kuz'min-Gross pour tout $n \gg 0$. En supposant en outre la nullité de $\Psi(L)$ on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\Phi(L)^{G\times\Gamma} \arrow[r, "\tau_S"] & H^1(G, \mathcal{T}_\infty^S(L)_\Gamma) \arrow[r] & H^1(G, \mathcal{T}_L^S) \\
 & H^1(G, \mathcal{W}_L^S) \arrow[u, "r_S"'] \arrow[r, "="] & H^1(G, \mathcal{W}_L^S) \arrow[u, "\rho_S"']
\end{tikzcd}$$

où le morphisme r_S est injectif, ce qui permet d'identifier $\operatorname{Ker} \rho_S$ *à* $\operatorname{Im} \tau_S \cap H^1(G, \mathcal{W}_L^S)$ *(avec un léger abus de notation). En particulier, la trivialité additionnelle de $\Phi(L)$ entraîne celle de* $\operatorname{Coker} j_{L/K}$.

Démonstration. — La nullité de $\Psi(L)$ entraîne un isomorphisme $\Theta_\infty^S(L) \simeq \mathcal{T}_\infty^S(L)_\Gamma$, d'où $H^1(G, \Theta_\infty^S(L)_\Gamma) \simeq H^1(G, \mathcal{T}_\infty^S(L)_\Gamma)$. Or, par définition de $\Theta_\infty^S(L)$ le co-descendu $\mathcal{W}_\infty^S(L)_\Gamma \simeq \mathcal{W}_L^S$ est un $\mathbb{Z}_p G$-facteur direct de $\Theta_\infty^S(L)_\Gamma$, d'où un morphisme $H^1(G, \mathcal{W}_L^S) \xrightarrow{r_S} H^1(G, \mathcal{T}_\infty^S(L)_\Gamma)$ injectif. Mais on sait que $\mathcal{T}_\infty^S(L)_\Gamma$ et $\mathcal{T}_L^S$ sont reliés par une suite exacte de co-descente $1 \to \mathcal{T}_\infty^S(L)_\Gamma \to \mathcal{T}_L^S \to \Phi(L)^\Gamma \to 1$ ([N4, prop 2.1]), d'où une suite exacte de cohomologie $\Phi(L)^{G\times\Gamma} \xrightarrow{\tau_S} H^1(G, \mathcal{T}_\infty^S(L)_\Gamma) \to H^1(G, \mathcal{T}_L^S)$ qui prend place dans le diagramme commutatif de l'énoncé. Le reste est immédiat. □

Remarque. D'une façon générale, on pourrait aussi procéder par co-descente, i.e. en prenant les co-invariants par G, comme dans [KM] pour les « noyaux sauvages étales ». Pour tout entier $i \geq 2$, ces noyaux $W_{2i-2}^{\text{ét}}(K)$ sont définis comme étant les noyaux de localisation $\operatorname{Ker}_S^2(K, \mathbb{Z}_p(i)) := \operatorname{Ker}(H^2(G_K, \mathbb{Z}_p(i)) \to \oplus_{v\in S} H^2(K_v, \mathbb{Z}_p(i)))$ (indépendamment de S contenant S_p). Par la dualité de Poitou-Tate, ce sont les duaux de Pontryagin des noyaux $\operatorname{Ker}_S^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) := \operatorname{Ker}(H^1(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) \to \oplus_{v\in S} H^1(K_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)))$, qui sont des versions « tordues » de $\mathcal{BP}_K$. Les résultats principaux de [KM] sur la co-descente $W_{2i-2}^{\text{ét}}(L)_G \to W_{2i-2}^{\text{ét}}(K)$ ne sont pas de type asymptotique, essentiellement grâce à l'existence, au départ, d'une suite exacte $1 \to H^1(G, K_{2i-1}^{\text{ét}}(L)) \to K_{2i-2}^{\text{ét}}(O_K^S) \to K_{2i-2}^{\text{ét}}(O_L^S)^G \to H^2(G, K_{2i-1}^{\text{ét}}(L)) \to 1$ pour $i \geq 2$ (nous n'expliquons pas les notations, pour lesquelles nous renvoyons à [KM, thm. 1.1]), mais qui n'a pas d'analogue inconditionnelle pour $i = 1$ (voir la partie (i) de la preuve de la proposition 3.6).

Rermerciements. Je remercie mes deux acolytes, G. Gras et J.-F. Jaulent, pour les nombreux échanges instructifs que nous avons eus tout au long de ce projet. Mes remerciements vont également à A. Movahhedi pour des discussions utiles sur le corollaire 3.14.

NB : Les références citées ici sont strictement limitées aux besoins du texte. Une bibliographie beaucoup plus extensive sur la S-ramification abélienne se trouve dans [G1].

Références

[G1] G. Gras, *Sur le module de Bertrandias-Payan dans une p-extension : noyau de capitulation*, dans ce volume.

[G2] G. Gras, *Logarithme p-adique et groupes de Galois*, J. reine angew. Math. **343** (1983), 63-80.

[G3] G. Gras, *Class Field Theory. From theory to practice*, SMM, Springer Verlag, 2nd edition (2005).

[Gb] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math., **98** (1976), 263-284.

[H] K. Hoechsmann, *Zum Einbettungsproblem*, J. reine angew. Math. **229** (1968), 81-106.

[J1] J.-F. Jaulent, *Sur la capitulation pour le module de Bertrandias-Payan*, dans ce volume.

[J2] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théorie des Nombres Bordeaux **6** (1994), 301-325.

[K] N. Klingen, *Das Einbettungsproblem für algebraische Zahlkörper bei Beschränkung der Verzweigung*, J. reine angew. Math. **334** (1982), 91-115.

[KM] M. Kolster, A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation*, Ann. Inst. Fourier, **50**, 1 (2000), 35-65.

[LMN] M. Le Floc'h, A. Movahhedi, T. Nguyen Quang Do, *On capitulation cokernels in Iwasawa theory*, Amer. J. Math., **127**, 4 (2005), 851-877.

[McS] W. McCallum, R. Sharifi, *A cup product in the Galois cohomology of number fields*, Duke Math. J. **120** (2003), 269-310.

[MN] A. Movahhedi, T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels*, dans « Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1987-88 », Birkhäuser Progress in Math. (1990), 155-200.

[N1] T. Nguyen Quang Do, *Sur la $\mathbb{Z}_p$-torsion de certains modules galoisiens*, Ann. Inst. Fourier **36**, 2 (1986), 27-46.

[N2] T. Nguyen Quang Do, *Sur la torsion de certains modules galoisiens II*, dans « Séminaire de Théorie des Nombres Paris », 1986-87, Birkhäuser Progress in Math. (1989), 271-297.

[N3] T. Nguyen Quang Do, *Formations de classes et modules d'Iwasawa*, dans « Number Theory, Noordwijkerhout », ed. H. Jager, Springer LNM (1984), 167-185.

[N4] T. Nguyen Quang Do, *Sur la cohomologie de certains modules galoisiens p-ramifiés*, dans « Théorie des Nombres », Laval, ed. J-M. De Koninck et C. Levesque, W. de Gruyter (1989), 740-753.

[N5] T. Nguyen Quang Do, *Étude kummerienne de la q-suite centrale descendante*, Publ. Math. Besançon 2 (2012), 123-139.

[NN] T. Nguyen Quang Do, V. Nicolas, *Nombres de Weil, sommes de Gauss et annulateurs galaoisiens*, Amer. J. Math. **133**, 6 (2011), 1533-1571.

[S] S. Seo, *On torsion towers of Bertrandias and Payan p-extensions*, communication privée, preprint, (2015).

---

12 février 2016

Thong Nguyen Quang Do, Laboratoire de Mathématique de Besançon, CNRS UMR 6623, Univ. Bourgogne Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon, France • *E-mail :* thong_nguyenquangdo@yahoo.fr