Publications mathématiques de Besançon
Algèbre et théorie des nombres

Huayi Chen

Sur la comparaison entre les minima et les pentes

2018, p. 5-23.
<http://pmb.cedram.org/item?id=PMB_2018____5_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de Besançon, UMR 6623 CNRS/UFC

Publications mathématiques de Besançon – 2018, 5-23

SUR LA COMPARAISON ENTRE LES MINIMA ET LES PENTES

par

Huayi Chen

Résumé. — On compare les minima et les pentes successifs d'un fibré vectoriel hermitien sur une courbe arithmétique et on démontre un encadrement uniforme de leurs différences. La preuve repose sur un principe général de comparaison des R-filtrations et un lien entre la géométrie des fibrés vectoriels hermitiens et le problème de transfert en géométrie des nombres. Ce résultat s'applique à l'étude des invariants birationnels des fibrés en droites hermitiens sur une variété arithmétique projective.

Abstract. — (*On comparaison between minima and slopes*) One compares the successive minima and successive slopes of a Hermitian vector bundle over an arithmetic curve and establishes a uniform bound for their differences. The proof relies on a general comparison principle of R-filtrations and a link between the geometry of Hermitian vector bundles and the transference problem in geometry of numbers. This result can be applied to study the birational invariants of Hermitian line bundles on an arithmetic projective variety.

1. Introduction

Les minima et les pentes successifs sont des invariants naturels en géométrie des fibrés vectoriels hermitiens. Les minima avaient été déjà étudiés dans la théorie classique de Minkowski dans le cadre des réseaux euclidiens puis ont été généralisés dans le cadre de géométrie des nombres algébriques par différent auteurs ; les pentes ont été introduites par Bost [3], en s'inspirant de la géométrie des fibrés vectoriels sur une courbe projective (notamment la théorie de Harder–Narasimhan [17]), ainsi que les travaux de Stuhler [22] et Grayson [16] dans le cadre arithmétique. La comparaison entre ces invariants a été étudiée par plusieurs auteurs [2, 12, 21] dans divers contextes. Le meilleur résultat dans la littérature est dû à Borek (cf. l'inégalité (1.1) plus bas), ce qui majore la différence entre la $i^{\text{ème}}$ pente et le $i^{\text{ème}}$ minima par i fois une fonction du rang du fibré vectoriel hermitien dont l'ordre de grandeur

Classification Mathématique (2010). — 14G40, 11H50.
Mots clefs. — Hermitian vector bundle, slopes, successive minima.

est le logarithme du rang (où l'entier i varie entre 1 et le rang du fibré vectoriel hermitien). Cette majoration, qui n'est pas uniforme en i, est peu efficace lorsque i est grand.

Dans ce travail on revisite le problème de comparaison entre les minima et les pentes en établissant une majoration uniforme de la différence entre les minima et les pentes successifs. L'amélioration majeure consiste à enlever le facteur i devant le majorant, c'est-à-dire que le nouveau majorant est d'ordre logarithmique (du rang du fibré vectoriel hermitien) et est uniforme en i. Pour obtenir ce résultat, on adopte une stratégie complètement différente de celle de Borek (reposant sur le deuxième théorème de Minkowski), qui consiste à combiner l'approche de $\mathbb{R}$-filtration et le théorème de transfert de Banaszczyk. Cette nouvelle méthode révèle aussi le lien étroit entre la comparaison entre les minima et les pentes (notamment celle entre le dernier minima et la dernière pente) et le problème de transfert, et pourrait avoir des applications à l'étude de ce dernier dans le futur.

Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K. Par *fibré vectoriel normé* sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ on entend un $\mathcal{O}_K$-module projectif de type fini E muni d'une famille de normes $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}}$ paramétrée par l'ensemble des plongements du corps K dans $\mathbb{C}$, où $\|\cdot\|_\sigma$ est une norme sur $E\otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma}\mathbb{C}$. On demande en plus que la donnée des normes $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}}$ soit invariante par la conjugaison complexe. Si de plus les normes $\|\cdot\|_\sigma$ sont toutes hermitiennes, on dit que le fibré vectoriel normé $(E,(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}})$ est un *fibré vectoriel hermitien*. Dans le cas où $K=\mathbb{Q}$ (et donc $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}$), la donnée d'un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ est équivalente à celle d'un réseau euclidien. En effet, il y a un unique plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. La restriction de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{Q}\to\mathbb{C}}$ à $E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ donne une norme euclidienne sur ce dernier. Ainsi on peut considérer E comme un réseau euclidien dans $(E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\|\cdot\|_{\mathbb{Q}\to\mathbb{C}})$.

Pour tout $\mathcal{O}_K$-module projectif de type fini E, on désigne par $\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)$ le rang de E sur $\mathcal{O}_K$, qui s'identifie à la dimension de $E\otimes_{\mathcal{O}_K}K$ sur K. Étant donné un fibré vectoriel normé $\overline{E}=(E,(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}})$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, pour tout $i\in\{1,\ldots,\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$, le $i^{\text{ème}}$ *minimum* (de Bombieri–Vaaler au sens de [15]) de $\overline{E}$ (noté $\lambda_i(\overline{E})$) est défini comme l'infimum de l'ensemble des nombres positifs R tels que l'espace vectoriel

$$\operatorname{Vect}_K\Big(\Big\{s\in E\;\Big|\;\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s\|_\sigma\leqslant R\Big\}\Big)$$

soit de rang $\geqslant i$ sur K. Dans le cas où $K=\mathbb{Q}$, cela revient à la définition classique des minima successifs à la Minkowski. Pour faciliter la comparaison on introduit la version logarithmique des minima en posant $\nu_i(\overline{E}):=-\ln\lambda_i(\overline{E})$. On a alors

$$\nu_1(\overline{E})\geqslant\nu_2(\overline{E})\geqslant\ldots\geqslant\nu_r(\overline{E}),\quad r=\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E).$$

Les pentes successives d'un fibré vectoriel hermitien sont construites d'une façon similaire à la théorie de Harder–Narasimhan en géométrie des fibrés vectoriels sur une courbe projective. À tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}=(E,(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}})$ on associe un nombre réel $\widehat{\deg}(\overline{E})$, appelé *degré d'Arakelov* (normalisé), qui est construit comme suit. On fixe une famille $\{s_i\}_{i=1}^r$ d'éléments de E qui forme une base de $E\otimes_{\mathcal{O}_K}K$ sur K (r est donc égal au rang de E sur $\mathcal{O}_K$) et on définit

$$\widehat{\deg}(\overline{E}):=\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\bigg(\ln\#\Big(\Lambda^rE/\mathcal{O}_K(s_1\wedge\cdots\wedge s_r)\Big)-\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\ln\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_\sigma\bigg).$$

Il s'avère que cette définition ne dépend pas du choix de la famille $\{s_i\}_{i=1}^r$.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non nul sur $\operatorname{Spec} O_K$. On considère l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(\operatorname{rg}_{O_K}(F), \widehat{\deg}(\overline{F}))$, où F parcourt l'ensemble des sous-O_K-modules de E, et dans la structure de fibré vectoriel hermitien de $\overline{F}$ on considère les normes induites. Le bord supérieur de l'enveloppe convexe de cet ensemble est le graphe d'une fonction concave $P_{\overline{E}}$ sur $[0, \operatorname{rg}_{O_K}(E)]$, qui est affine sur chaque intervalle $[i-1, i]$, $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_{O_K}(E)\}$. On désigne par $\widehat{\mu}_i(\overline{E})$ la pente de la fonction $P_{\overline{E}}$ sur $[i-1, i]$ (qui est égale à $P_{\overline{E}}(i) - P_{\overline{E}}(i-1)$), appelée *$i^{\text{ème}}$ pente* de $\overline{E}$. Comme la fonction $P_{\overline{E}}$ est concave, on a

$$\widehat{\mu}_1(\overline{E}) \geqslant \widehat{\mu}_2(\overline{E}) \geqslant \ldots \geqslant \widehat{\mu}_r(\overline{E}), \quad r = \operatorname{rg}_{O_K}(\overline{E}).$$

La comparaison entre les minima et les pentes consiste à majorer et minorer la différence $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E})$ par des termes qui ne dépendent que de K, $\operatorname{rg}_{O_K}(E)$ et $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_{O_K}(E)\}$. On dit qu'un majorant ou un minorant est uniforme s'il ne dépend pas de i. Par l'inégalité de Hadamard, il est facile de montrer que la $i^{\text{ème}}$ pente $\widehat{\mu}_i(\overline{E})$ est toujours minorée par $\nu_i(\overline{E})$ (voir la proposition 3.4 et le théorème 3.7 pour les détails, cf. [2, théorème 1] pour une autre démonstration). En outre, l'égalité $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \nu_i(\overline{E})$ est atteinte pour tout i lorsque $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien trivial. La majoration de $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E})$ est cependant plus subtile. Le résultat de Borek donne (cf. [2, théorème 3])

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E}) \leqslant \frac{i}{\operatorname{rg}_{O_K}(E)} C(\operatorname{rg}_{O_K}(E), K), \tag{1.1}$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C(n, K) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]}\Big(n(r_1 + r_2)\ln(2) + \frac{n}{2}\ln|\Delta_K| - r_1 \ln(v_n) - r_2 \ln(v_{2n})\Big),$$

avec

- r_1 et r_2 : les nombres des places réelles et des places complexes de K respectivement,
- Δ_K : le discriminant absolu de K,
- v_m : la mesure de Lebesgue de la boule unité dans $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$.

La stratégie de Borek repose sur le deuxième théorème de Minkowski, qui pourrait être considéré comme une comparaison entre la somme des minima (logarithmiques) successifs et le degré d'Arakelov (qui s'identifie à la somme des pentes successives). Dans le langage de la géométrie d'Arakelov, le deuxième théorème de Minkowski s'énonce comme

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) - \sum_{i=1}^{\operatorname{rg}_{O_K}(E)} \nu_i(\overline{E}) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rg}_{O_K}(E)} \big(\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E})\big) \leqslant C(\operatorname{rg}_{O_K}(E), K). \tag{1.2}$$

La méthode de Borek consiste à combiner cette inégalité avec la filtration de Harder–Narasimhan. Elle conduit à un facteur i dans le terme à droite de l'inégalité (1.1).

Par la formule de Stirling, on peut montrer que

$$C(n, K) = O(n \ln(n)), \quad n \to +\infty.$$

La somme de l'inégalité (1.1) pour $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_{O_K}(E)\}$ donne une majoration de la différence entre le degré d'Arakelov et la somme des minima successifs qui est beaucoup moins bonne que (1.2), où on multiplie le majorant $C(\operatorname{rg}_{O_K}(E), K)$ par $(\operatorname{rg}_{O_K}(E) + 1)/2$. Cela suggère que l'inégalité (1.1) n'est pas assez précise lorsque i est grand.

Dans cet article on établit une majoration de la différence entre la $i^{\text{ème}}$ pente et le $i^{\text{ème}}$ minima comme suit (cf. le théorème 3.7).

Théorème 1.1. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non nul sur* $\operatorname{Spec} O_K$. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}_{O_K}(E)\}$,*

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E}) \leqslant \ln(\mathrm{rg}_{O_K}(E)) + \min\left(\frac{3\ln|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}, \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]} + \frac{1}{2}\ln[K:\mathbb{Q}]\right). \tag{1.3}$$

La majoration obtenue dans le théorème est uniforme en i. Par ailleurs, le majorant dans (1.3) a le même ordre de grandeur que $C(\mathrm{rg}_{O_K}(E), K)/\mathrm{rg}_{O_K}(E)$ quand $\mathrm{rg}_{O_K}(E) \to +\infty$. Ainsi ce résultat améliore considérablement l'inégalité (1.1) lorsque i est grand. En outre, la somme sur i des inégalités dans (1.3) donne une majoration de $\widehat{\deg}(\overline{E}) - \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}_{O_K}(E)} \nu_i(\overline{E})$ dont l'ordre de grandeur est identique à celui du majorant dans le deuxième théorème de Minkowski lorsque $\mathrm{rg}_{O_K}(E)$ tend vers l'infini.

La nouveauté principale de la méthode de démonstration du théorème 1.1 est de découvrir que l'on peut ramener le problème à comparer les $\mathbb{R}$-filtrations par minima et de Harder–Narasimhan. Cela permet de montrer que, si on désigne par $\delta(n, K)$ la borne supérieure de $\widehat{\mu}_n(\overline{F}) - \nu_n(\overline{F})$, où $\overline{F}$ parcourt l'ensemble des fibrés vectoriels hermitiens de rang n sur $\operatorname{Spec} O_K$, alors pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ de rang n sur $\operatorname{Spec} O_K$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E}) \leqslant \delta(n, K). \tag{1.4}$$

Cette inégalité est obtenue en s'appuyant sur l'approche de $\mathbb{R}$-filtration introduite dans [10], voir aussi mon mémoire d'habilitation [8, §1.2.4] pour la comparaison des $\mathbb{R}$-filtrations.

L'idée de ramener la comparaison entre les minima (de Roy–Thunder ou ceux des quotients) et les pentes à celle entre le dernier minimum et la dernière pente apparaît aussi (d'une manière plus directe) dans les notes du cours de Gaudron [14] à l'école d'été 2017 de l'institut Fourier. Le passage à la comparaison des $\mathbb{R}$-filtrations donne cependant une interprétation conceptuelle de cette approche.

Pour en déduire une majoration explicite de $\widehat{\mu}_i - \nu_i$, on relie la comparaison entre la dernière pente et le dernier minimum au problème de transfert en géométrie des nombres. Pour tout entier $r \geqslant 1$ on désigne par $\partial(r, \mathbb{Q})$ la borne supérieure des $-(\nu_1(\overline{V}^\vee) + \nu_r(\overline{V}))$, où $\overline{V}$ parcourt l'ensemble des réseaux euclidiens de rang r. On établit l'inégalité suivante (cf. la proposition 4.7)

$$\delta(n, K) \leqslant \partial(n[K:\mathbb{Q}], \mathbb{Q}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]} \tag{1.5}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. Une version faible de l'inégalité (1.3) s'ensuit via le théorème de transfert à la Banaszczyk (cf. [1, Theorem 2.1]).

Après avoir soumis l'article pour publication, le rapporteur m'a signalé l'article [15] de Gaudron et Rémond et m'indique une amélioration de la majoration (1.5) en utilisant les minima de Roy–Thunder et des résultats dans cette référence. Cela permet d'améliorer le terme constant dans la majoration obtenue dans la version précédente de l'article (comparer le théorème 1.1 et le corollaire 4.8). Je tiens à lui exprimer mes remerciements.

Soient $\pi : X \to \operatorname{Spec} O_K$ un morphisme projectif et plat et $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur X. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\overline{E}_n$ le O_K-module projectif $\pi_*(L^{\otimes n})$ muni d'une famille

$(\|\cdot\|_{n,\sigma})_{\sigma:K\to\mathbb{C}}$ de normes hermitiennes telles que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sup_{0\neq s\in E_n\otimes_{O_K,\sigma}\mathbb{C}}\left|\ln\frac{\|s\|_{n,\sigma}}{\|s\|_{n,\sigma,\sup}}\right|=0, \tag{1.6}$$

où $\|s\|_{n,\sigma,\sup}=\sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})}|s(x)|_\sigma$. On désigne par η_n et $\tilde{\eta}_n$ les mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$ définies comme

$$\eta_n=\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{r_n}\delta_{\hat{\mu}_i(\overline{E}_n)/n},\quad \tilde{\eta}_n=\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{r_n}\delta_{\nu_i(\overline{E}_n)/n},$$

où r_n est le rang de $\pi_*(L^{\otimes n})$ sur O_K, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, δ_x est le mesure de Dirac en x. Il est démontré dans [10] et dans [9] que, si L_K est un faisceau inversible ample sur X, alors les suites de mesures $(\eta_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\tilde{\eta}_n)_{n\geqslant 1}$ convergent faiblement vers des mesures boréliennes $\eta_{\overline{L}}$ et $\tilde{\eta}_{\overline{L}}$ respectivement (qui ne dépendent pas du choix des normes hermitiennes $\|\cdot\|_{n,\sigma}$ vérifiant (1.6)). Ces deux mesures ont des interprétations géométriques différentes. La mesure $\eta_{\overline{L}}$ est liée au comportement asymptotique des polygones de Harder–Narasimhan du système linéaire gradué de $\overline{L}$ (cf. [10, théorème 3.1.8], voir aussi §1.2.5 du *loc. cit.* pour le lien entre les polygones et les mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$). La mesure $\tilde{\eta}_{\overline{L}}$ est liée aux propriétés birationnelles de $\overline{L}$. En particulier, le volume arithmétique de $\overline{L}$ est égal à

$$(\dim(X)+1)\,\mathrm{vol}(L)\int_{\mathbb{R}}\max(x,0)\,\tilde{\eta}_{\overline{L}}(\mathrm{d}x).$$

En outre, les convergences des suites $(\eta_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\tilde{\eta}_n)_{n\geqslant 1}$ ont été obtenues par des méthodes différentes. La convergence de $(\eta_n)_{n\geqslant 1}$ repose sur la construction d'un couplage discret entre des répartitions uniformes sur les monômes ; tandis que celle de $(\tilde{\eta}_n)_{n\geqslant 1}$ découle du théorème de Hilbert–Samuel pour les systèmes linéaires gradués démontré par Lazarsfeld et Mustaţă [19]. Comme application du théorème 1.1 , on démontre que les mesures limites $\eta_{\overline{L}}$ et $\tilde{\eta}_{\overline{L}}$ sont identiques (cf. le théorème 5.1 *infra*). La majoration uniforme (1.3) est le point clé dans la comparaison des deux suites de mesures $(\eta_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\tilde{\eta}_n)_{n\geqslant 1}$. Cela établit un lien entre le comportement asymptotique des polygones de Harder–Narasimhan et la géométrie birationnelle de la variété arithmétique de X (voir la remarque 5.2).

L'article est organisé comme suit. Dans le deuxième paragraphe on rappelle la construction des $\mathbb{R}$-filtrations par minima et de Harder–Narasimhan d'un fibré vectoriel hermitien sur une courbe arithmétique. Le troisième paragraphe est consacré à démontrer un principe général de comparaison des $\mathbb{R}$-filtrations et à en déduire l'inégalité (1.4). Dans le quatrième paragraphe, on propose une majoration de la fonction $\delta(\cdot,K)$ et on établit le théorème 1.1. Enfin, on conclut l'article par des applications et quelques commentaires dans le cinquième paragraphe.

Ce travail est partiellement soutenu par le fond de recherche ANR-14-CE25-0015. Une partie de recherches qui ont conduit à cet article ont été réalisées à Beijing International Center for Mathematical Research (BICMR) lors de ma visite scientifique. Je voudrais remercier le centre pour son hospitalité.

2. $\mathbb{R}$-filtrations associées à un fibré vectoriel hermitien

Le but de ce paragraphe est de rappeler la construction des $\mathbb{R}$-filtrations par minima et par pentes d'un fibré vectoriel hermitien (voir la définition 3.1 pour la notion de $\mathbb{R}$-filtration en général). Ces $\mathbb{R}$-filtrations sont des outils pour comparer les minima et les pentes.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel normé non nul sur $\operatorname{Spec} O_K$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E})$ le sous-espace K-vectoriel de $E_K := E \otimes_{O_K} K$ engendré par l'ensemble

$$\Big\{s \in E \,\Big|\, \max_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \|s\|_\sigma \leqslant \mathrm{e}^{-t}\Big\}.$$

On voit aussitôt que, si t_1 et t_2 sont deux nombres réels tels que $t_1 \geqslant t_2$, alors on a $F_{\mathrm{m}}^{t_1}(\overline{E}) \subset F_{\mathrm{m}}^{t_2}(\overline{E})$. Autrement dit, la famille $(F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}))_{t \in \mathbb{R}}$ est décroissante. En outre, par définition, pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}_{O_K}(E)\}$, on a

$$\nu_i(\overline{E}) = \sup\{u \in \mathbb{R} \mid \mathrm{rg}_K(F_{\mathrm{m}}^u(\overline{E})) \geqslant i\}.$$

En d'autres termes, pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}_{O_K}(E)\}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{rg}_K(F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E})) \geqslant i \iff \nu_i(\overline{E}) \geqslant t. \tag{2.1}$$

Proposition 2.1. — *Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel normé non nul sur $\operatorname{Spec} O_K$ et r le rang de E sur O_K.*

a. *Si $t > \nu_1(\overline{E})$, alors $F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}) = \{0\}$.*

b. *Si $t \leqslant \nu_r(\overline{E})$, alors $F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}) = E_K$.*

c. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, les sous-espaces vectoriels de E_K dans la famille $(F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}))_{t \in]\nu_{i+1}(\overline{E}), \nu_i(\overline{E})]}$ sont égaux.*

Démonstration. — Ce sont des conséquences immédiates de la relation (2.1).

Définition 2.2. — Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel normé non nul. On désigne par $\nu_{\min}(\overline{E})$ le dernier minimum logarithmique de $\overline{E}$. Par définition, si r est le rang de E sur O_K, alors $\nu_{\min}(\overline{E}) = \nu_r(\overline{E})$.

La proposition suivante donne une construction de F_{m} en utilisant $\nu_{\min}$.

Proposition 2.3. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel normé non nul sur $\operatorname{Spec} O_K$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}) = \sum_{\substack{0 \neq F \subset E \\ \nu_{\min}(\overline{F}) \geqslant t}} F_K,$$

où F parcourt l'ensemble des sous-O_K-modules non nuls de E, et dans la structure de fibré vectoriel normé de $\overline{F}$ on considère des normes induites.

Démonstration. — Soit F un sous-O_K-module non nul de E tel que $\nu_{\min}(\overline{F}) \geqslant t$. Il existe alors une famille $\{s_i\}_{i=1}^n$ d'éléments de F linéairement indépendants sur K, qui vérifie

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \max_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \|s_i\|_\sigma \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

L'espace vectoriel F_K est donc contenu dans $F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E})$. Réciproquement, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}) \neq \{0\}$, il existe des éléments $u_1, \ldots, u_k$ dans E qui engendrent $F_{\mathrm{m}}^t(\overline{E})$ comme espace vectoriel sur K, et tels que

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, k\}, \quad \max_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \|u_j\|_\sigma \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

Soit F le sous-O_K-module de E engendré par $\{u_1, \ldots, u_k\}$. Par définition le dernier minimum de $\overline{F}$ est $\geqslant t$.

Les pentes successives peuvent aussi être décrites par une $\mathbb{R}$-filtration en s'appuyant sur la théorie de Harder–Narasimhan. Cette construction (de $\mathbb{R}$-filtration) a été introduite dans [10]. Dans la suite on rappelle la théorie de Harder–Narasimhan pour les fibrés vectoriels hermitiens et la construction de $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan.

Pour tout fibré vectoriel hermitien non nul $\overline{E}$, on désigne par $\widehat{\mu}(\overline{E})$ le quotient $\widehat{\deg}(\overline{E})/\operatorname{rg}_{O_K}(E)$, appelé *pente* de $\overline{E}$. Le fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ est dit *semi-stable* si, pour tout sous-O_K-module non nul F de E, on a $\widehat{\mu}(\overline{F}) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E})$. Étant donné un fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec} O_K$, il existe un unique drapeau

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E$$

de sous-O_K-modules de E (appelé *drapeau de Harder–Narasimhan*) qui satisfait aux conditions suivantes (cf. [3, §A.3]) :

1. pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, le O_K-module quotient E_j/E_{j-1} est projectif et, si on le munit des normes sous-quotients, le fibré vectoriel hermitien $\overline{E_j/E_{j-1}}$ est semi-stable ;

2. les pentes des fibrés vectoriels hermitiens sous-quotients vérifient les inégalités $\widehat{\mu}(\overline{E_1/E_0}) > \ldots > \widehat{\mu}(\overline{E_n/E_{n-1}})$.

Soit $\Delta_{\overline{E}}$ l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ des points de la forme $(\operatorname{rg}_{O_K}(F), \widehat{\deg}(\overline{F}))$, où F parcourt l'ensemble des sous-O_K-module de E. Le bord supérieur de $\Delta_{\overline{E}}$ est le graphe d'une fonction $P_{\overline{E}}$ (définie sur l'intervalle $[0, \operatorname{rg}_{O_K}(E)]$) qui est concave et affine par morceaux. La fonction $P_{\overline{E}}$ est appelée *polygone de Harder–Narasimhan* de $\overline{E}$. Les abscisses où la fonction $P_{\overline{E}}$ change sa pente sont précisément $\operatorname{rg}_{O_K}(E_1), \ldots, \operatorname{rg}_{O_K}(E_{n-1})$, et la valeur de la fonction $P_{\overline{E}}$ en $\operatorname{rg}_{O_K}(E_j)$ est $\widehat{\deg}(\overline{E}_j)$ pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$.

On désigne par $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$ la pente de $\overline{E_n/E_{n-1}}$, qui est la dernière pente parmi les pentes successives de $\overline{E}$ (appelée *pente minimale* de $\overline{E}$). Elle est aussi égale à la plus petite pente des quotients projectifs non nuls de E munis des normes quotients. On désigne par $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ la pente de $\overline{E}_1$, appelée *pente maximale* de $\overline{E}$. Elle est égale à la plus grande pente des sous-O_K-modules de E munis des normes induites.

Soit $r = \operatorname{rg}_{O_K}(E)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on désigne par $\widehat{\mu}_i(\overline{E})$ la pente de la fonction $P_{\overline{E}}$ sur l'intervalle $[i-1, i]$. On a

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E_j/E_{j-1}}) \text{ si et seulement si } \operatorname{rg}_{O_K}(E_{j-1}) < i \leqslant \operatorname{rg}_{O_K}(E_j).$$

En outre, on a $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_1(\overline{E})$ and $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_r(\overline{E})$.

Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non nul sur $\operatorname{Spec} O_K$, et

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n$$

son drapeau de Harder–Narasimhan. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit

$$F^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) := \begin{cases} \{0\}, & \text{si } t > \widehat{\mu}(\overline{E_1/E_0}), \\ E_i \otimes_{O_K} K, & \text{si } \widehat{\mu}(\overline{E}_{i+1}/E_i) < t \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E_i}/E_{i-1}),\ i \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ E \otimes_{O_K} K, & \text{si } t \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E_n/E_{n-1}}). \end{cases}$$

La proposition suivante, qui est parallèle à la proposition 2.1, résulte directement de la définition de F_{HN}.

Proposition 2.4. — *Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non nul sur* $\operatorname{Spec} O_K$ *et r le rang de E sur O_K.*

a. *Si $t > \widehat{\mu}_1(\overline{E})$, alors $F^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) = \{0\}$.*

b. *Si $t \leqslant \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$, alors $F^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) = E_K$.*

c. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, les sous-espaces vectoriels de E_K dans la famille $(F^t_{\mathrm{m}}(\overline{E}))_{t\in\,]\widehat{\mu}_{i+1}(\overline{E}),\widehat{\mu}_i(\overline{E})]}$ sont égaux.*

d. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \operatorname{rg}_K(F^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E})) \geqslant i\}$.*

Le résultat suivant, qui est parallèle à la proposition 2.3, a été démontré dans [10]. On renvoie les lecteurs au corollaire 2.2.3 du *loc. cit.* pour une démonstration.

Proposition 2.5. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur* $\operatorname{Spec} O_K$. *On a*

$$F^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) = \sum_{\substack{\{0\}\neq F\subseteq E\\ \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F})>t}} F_K,$$

où F parcourt l'ensemble des sous-O_K-modules non nuls de E, et dans la structure de fibré vectoriel hermitien de $\overline{F}$ on considère des normes induites.

3. Comparaison des filtrations

Dans ce paragraphe, on considère le problème suivant. Étant données deux $\mathbb{R}$-filtrations du même espace vectoriel de rang fini sur un corps, comment comparer les points de saut de ces deux filtrations ? On démontre un principe formel et on l'applique à la comparaison des filtrations par minima et de Harder–Narasimhan.

Définition 3.1. — Soient K un corps et V un espace vectoriel de rang fini sur K. On appelle $\mathbb{R}$-*filtration de V* toute famille $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^t(V))_{t\in\mathbb{R}}$ de sous-espaces K-vectoriels de V paramétrée par $\mathbb{R}$, qui satisfait aux conditions suivantes :

a. (décroissance) pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $t_1 \geqslant t_2$, on a $\mathcal{F}^{t_1}(V) \subseteq \mathcal{F}^{t_2}(V)$;

b. (séparation) pour tout $t \in \mathbb{R}$ assez positif, $\mathcal{F}^t(V) = \{0\}$;

c. (exhaustivité) pour tout $t \in \mathbb{R}$ assez négatif, $\mathcal{F}^t(V) = V$;

d. (continuité à gauche) la fonction $t \mapsto \operatorname{rg}_K(\mathcal{F}^t(V))$ est continue à gauche (et donc est localement constante à gauche).

Pour tout $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_K(V)\}$, on définit

$$Z_{\mathcal{F}}(i) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \operatorname{rg}_K(\mathcal{F}^t(V)) \geqslant i\}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$Z_{\mathcal{F}}(i) \geqslant t \iff \operatorname{rg}_K(\mathcal{F}^t(V)) \geqslant i. \tag{3.1}$$

Exemple 3.2. — Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non nul sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Les familles $(\mathcal{F}^t_{\mathrm{m}}(\overline{E}))_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}))_{t\in\mathbb{R}}$ sont des $\mathbb{R}$-filtrations de $E_K = E \otimes_{\mathcal{O}_K} K$, comme le montrent les propositions 2.1 et 2.4.

Proposition 3.3. — *Soient K un corps et V un espace vectoriel de rang fini sur K. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathbb{R}$-filtrations de V. On suppose que a est un nombre réel tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $\mathcal{F}^t(V) \subseteq \mathcal{G}^{t-a}(V)$. Alors on a $Z_{\mathcal{F}} \leqslant Z_{\mathcal{G}} + a$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{G}(a)$ la $\mathbb{R}$-filtration $(\mathcal{G}^{t-a}(V))_{t\in\mathbb{R}}$. Par définition on a $Z_{\mathcal{G}(a)} = Z_{\mathcal{G}} + a$. Il suffit de démontrer la proposition dans le cas particulier où $a = 0$. Par la relation (3.1), pour tout $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_K(V)\}$, si $Z_{\mathcal{F}}(i) \geqslant t$, alors $\operatorname{rg}_K(\mathcal{F}^t(V)) \geqslant i$, qui implique que $\operatorname{rg}_K(\mathcal{G}^t(V)) \geqslant i$ et donc $Z_{\mathcal{G}}(i) \geqslant t$. Ainsi on obtient $Z_{\mathcal{F}}(i) \leqslant Z_{\mathcal{G}}(i)$.

Proposition 3.4. — *Soit K un corps de nombres. Pour tout fibré vectoriel hermitien non nul $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on a $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \geqslant \nu_{\min}(\overline{E})$.*

Démonstration. — Soit $\{s_i\}_{i=1}^r$ une famille d'éléments de E qui forme une base de l'espace vectoriel E_K et telle que

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, r\}, \quad \max_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \|s_i\|_\sigma \leqslant e^{-t},$$

où t est un nombre réel. Soit G un $\mathcal{O}_K$-module quotient de E qui est projectif et non nul. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit α_i l'image canonique de s_i dans G. Sans perte de généralité, on suppose que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ forme une base de G_K, où $n \in \{1, \ldots, r\}$. Par définition on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}(\overline{G}) &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\ln \#(\det(G)/\mathcal{O}_K(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)) - \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \ln \|\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n\|_\sigma\Big) \\
&\geqslant -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \ln \|\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n\|_\sigma \geqslant -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \ln \|\alpha_i\|_\sigma \\
&\geqslant -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \ln \|s_i\|_\sigma \geqslant tn,
\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité provient de l'inégalité d'Hadamard. On obtient donc $\widehat{\mu}(\overline{G}) \geqslant t$. Comme G est arbitraire, on a $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \geqslant \nu_{\min}(\overline{E})$.

Définition 3.5. — Soit r un entier, $r \geqslant 1$. Pour tout corps de nombres K, on désigne par $\delta(r, K)$ la borne supérieure des $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) - \nu_{\min}(\overline{E})$, où $\overline{E}$ parcourt l'ensemble des fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ qui sont de rang r.

Remarque 3.6. — Soient K un corps de nombres, et $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. On a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E} \oplus \overline{F}) = \min(\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}), \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}))$$

et

$$\nu_{\min}(\overline{E} \oplus \overline{F}) \leqslant \min(\nu_{\min}(\overline{E}), \nu_{\min}(\overline{F})).$$

Par conséquent, la fonction $(r \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}) \mapsto \delta(r, K)$ est croissante.

Théorème 3.7. — *Soit K un corps de nombres. Pour tout fibré vectoriel hermitien non nul $\overline{E}$ et tout $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$, on a*

$$\nu_i(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_i(\overline{E}) \leqslant \nu_i(\overline{E}) + \delta(\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E), K).$$

Démonstration. — D'après les propositions 3.4, 2.5 et 2.3, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $F^t_{\mathrm{m}}(\overline{E}) \subseteq F^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E})$. En outre, pour tout sous-O_K-module non nul F de E, on a (voir la remarque 3.6 pour la deuxième inégalité)

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) \leqslant \nu_{\min}(\overline{F}) + \delta(\mathrm{rg}_{O_K}(F), K) \leqslant \nu_{\min}(\overline{F}) + \delta(\mathrm{rg}_{O_K}(E), K).$$

Cela montre que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad F^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) \subseteq F_{\mathrm{m}}^{t-\delta(\mathrm{rg}_{O_K}(E), K)}(\overline{E}).$$

Donc les inégalités annoncées proviennent de la proposition 3.3.

4. Comparaison entre la dernière pente et le dernier minimum

Dans le paragraphe précédent, on ramène la comparaison entre les minima successifs et les pentes successives à celle entre le dernier minimum et la pente minimale. On présente ici une majoration de la fonction $\delta(\,\cdot\,, K)$ introduite dans la définition 3.5. Grâce au théorème 3.7, cela donne une comparaison explicite et uniforme entre les minima successifs et les pentes successives.

4.1. Lien avec le problème de transfert. — On commence par relier la comparaison entre les minima et les pentes au problème de transfert en géométrie des nombres.

Proposition 4.1. — *Soient K un corps de nombres et $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur* $\operatorname{Spec} O_K$. *On a*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) - \nu_{\min}(\overline{E}) \leqslant -(\nu_1(\overline{E}^\vee) + \nu_{\min}(\overline{E}))$$

où $\overline{E}^\vee$ désigne le fibré vectoriel hermitien composé du module dual de E muni des normes duales.

Démonstration. — Rappelons que le degré d'Arakelov du dual d'un fibré vectoriel hermitien est l'opposé du degré d'Arakelov du fibré vectoriel hermitien. On en déduit $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee) + \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = 0$ (cf. [4, (4.2)]). En outre, par le théorème 3.7 on obtient $\nu_1(\overline{E}^\vee) \leqslant \widehat{\mu}_1(\overline{E}^\vee) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee)$, d'où

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) - \nu_{\min}(\overline{E}) = -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee) - \nu_{\min}(\overline{E}) \leqslant -\nu_1(\overline{E}^\vee) - \nu_{\min}(\overline{E}).$$

Définition 4.2. — Soient n un entier, $n \geqslant 1$, et K un corps de nombres. On désigne par $\eth(n, K)$ la borne supérieure des $-\nu_1(\overline{E}^\vee) - \nu_{\min}(\overline{E})$, où $\overline{E}$ parcourt l'ensemble des fibrés vectoriels de rang n sur $\operatorname{Spec} O_K$, et $\overline{E}^\vee$ désigne le O_K-module dual de E muni des normes duales.

La proposition 4.1 conduit naturellement à la comparaison suivante.

Corollaire 4.3. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout corps de nombres K, on a $\delta(n, K) \leqslant \eth(n, K)$.*

L'estimation de l'invariant $\eth(n, K)$ est connue comme l'un des problèmes de transfert dans la littérature. Le cas des réseaux euclidiens (c'est-à-dire $K = \mathbb{Q}$) a été étudié par Banaszczyk (cf. [1], Theorem 2.1) que l'on rappelle comme suit.

***Théorème 4.4* (Banaszczyk).** — *Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on a*

$$\eth(n, \mathbb{Q}) \leqslant \ln(n). \tag{4.1}$$

Remarque 4.5. — On compare la borne supérieure (4.1) de $\eth(n,\mathbb{Q})$ à la constante $\frac{1}{n}C(n,\mathbb{Q})$ introduite dans la majoration (1.1) de Borek. Rappelons que dans le cas où $K=\mathbb{Q}$ on a

$$\frac{1}{n}C(n,\mathbb{Q}) = \ln(2) - \frac{1}{n}\ln(v_n).$$

Par la formule de Stirling, on obtient (cf. [5, §3.2])

$$\frac{1}{n}C(n,\mathbb{Q}) = \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{e\pi}{2}\Big) + \frac{1}{2n}\ln(\pi n) + \frac{1}{6n^2}\theta(n/2),$$

où θ est une fonction dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. Asymptotiquement quand $n\to+\infty$, $\frac{1}{n}C(n,\mathbb{Q})$ et $\ln(n)$ ont le même ordre de grandeur. Cependant la combinaison du théorème 3.7, du corollaire 4.3 et de la borne supérieure (4.1) montre que, pour tout fibré vectoriel hermitien non nul $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et tout $i\in\{1,\ldots,\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(E)\}$, on a

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E}) \leqslant \ln(\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}}(E)), \tag{4.2}$$

où le facteur i n'apparaît pas dans le majorant. Cette inégalité est meilleure que l'estimation de Borek dès que $i\geqslant 8$.

Dans la suite, on propose une variante de la proposition 4.1 qui permet de majorer $\delta(n,K)$ par

$$\eth(n[K:\mathbb{Q}],\mathbb{Q}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\ln|\Delta_K|.$$

On fixe un corps de nombres K et on désigne par $\pi:\operatorname{Spec}O_K\to\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ le morphisme canonique. Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien, on désigne par $\pi_*(E)$ le groupe abélien sous-jacent à E. Il s'avère que

$$\pi_*(E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} = \bigoplus_{\sigma:K\to\mathbb{C}} E\otimes_{O_K,\sigma}\mathbb{C}.$$

On munit cet espace vectoriel de la norme hermitienne $\|\cdot\|$ telle que, pour tout $s=(s_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\in\pi_*(E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$, on ait

$$\|s\|^2 = \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_\sigma\|_\sigma^2.$$

Soit $\omega_{O_K/\mathbb{Z}} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(O_K,\mathbb{Z})$ le module canonique associé au corps de nombres K, qui est un O_K-module projectif de rang 1. Il s'avère que l'application de trace $\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}$ est un élément non nul de $\omega_{O_K/\mathbb{Z}}$. On munit $\omega_{O_K/\mathbb{Z}}$ de la structure de fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}O_K$ de sorte que $\|\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\|_\sigma = 1$ pour tout $\sigma:K\to\mathbb{Q}$. On a

$$\widehat{\deg}(\overline{\omega_{O_K/\mathbb{Z}}}) = \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}. \tag{4.3}$$

De plus, pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec}O_K$, on a un isomorphisme

$$\pi_*(\overline{E}^\vee\otimes\overline{\omega_{O_K/\mathbb{Z}}}) = \pi_*(\overline{E})^\vee \tag{4.4}$$

de fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec}O_K$ (c'est-à-dire un isomorphisme de O_K-modules qui induit une isométrie pour tout $\sigma:K\to\mathbb{C}$). On renvoie les lecteurs à [5, Proposition 3.2.2] pour une démonstration.

Proposition 4.6. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non nul sur $\operatorname{Spec}O_K$. On a*

$$\nu_1(\overline{E}) \geqslant \nu_1(\pi_*(\overline{E})),\quad \nu_{\min}(\overline{E}) \geqslant \nu_{\min}(\pi_*(\overline{E})).$$

Démonstration. — Soit s un élément de E. Par définition, on a
$$\|s\|^2 = \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \|s\|_\sigma^2 \geqslant \max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \|s\|_\sigma^2.$$
Soit $\lambda > 0$. Si s est un élément non nul de E tel que $\|s\| \leqslant \lambda$, alors pour tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$ on a $\|s\|_\sigma \leqslant \lambda$. On obtient donc $\nu_1(\overline{E}) \geqslant \nu_1(\pi_*(\overline{E}))$. De même, si $\{s_1, \ldots, s_n\}$ est une base de $\pi_*(E)$ sur $\mathbb{Z}$ telle que $\|s_i\| \leqslant \lambda$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors on a $\|s_i\|_\sigma \leqslant \lambda$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$. On peut donc soustraire une sous-famille $(s_i)_{i\in I}$ de $\{s_1, \ldots, s_n\}$ qui forme une base de E_K sur K telle que $\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \|s_i\|_\sigma \leqslant \lambda$. On en déduit donc $\nu_{\min}(\overline{E}) \geqslant \nu_{\min}(\pi_*(\overline{E}))$.

Proposition 4.7. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\delta(n, K) \leqslant \eth([K : \mathbb{Q}]n, \mathbb{Q}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K : \mathbb{Q}]}. \tag{4.5}$$

Démonstration. — Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien de rang n sur $\operatorname{Spec} O_K$. D'après la proposition 4.6, on a
$$-\nu_{\min}(\overline{E}) \leqslant -\nu_{\min}(\pi_*(\overline{E})) \leqslant \nu_1(\pi_*(\overline{E})^\vee) + \eth(n[K : \mathbb{Q}], \mathbb{Q}),$$
où la deuxième inégalité provient de la définition de la fonction $\eth(\,\cdot\,, \mathbb{Q})$. Par (4.4) on obtient

$$\nu_1(\pi_*(\overline{E})^\vee) = \nu_1(\pi_*(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega_{O_K/\mathbb{Z}}})) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega_{O_K/\mathbb{Z}}}), \tag{4.6}$$

où l'inégalité provient de la proposition 4.6. D'après [3, (A.2)], on a
$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega_{O_K/\mathbb{Z}}}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee) + \widehat{\deg}(\overline{\omega_{O_K/\mathbb{Z}}}) = -\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K : \mathbb{Q}]},$$
où la deuxième égalité provient de (4.3) et [4, (4.2)]. On en déduit
$$\mu_{\min}(\overline{E}) - \nu_{\min}(\overline{E}) \leqslant \eth([K : \mathbb{Q}]n, \mathbb{Q}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K : \mathbb{Q}]}.$$
La proposition est donc démontrée.

Corollaire 4.8. — *Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$ et tout corps de nombres K, on a*
$$\delta(n, K) \leqslant \ln(n[K : \mathbb{Q}]) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K : \mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe de (4.1) et (4.5).

4.2. Minima de Roy–Thunder et démonstration du théorème 1.1. — Il existe d'autres notions de minima successifs dans la littérature. Soient K un corps de nombres et $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} O_K$. Pour tout $s \in E_K$, on définit
$$\widehat{\deg}(s) := -\frac{1}{[K : \mathbb{Q}]}\Big(\sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}(O_K)} \ln\|s\|_{\mathfrak{p}} + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \ln\|s\|_\sigma\Big),$$
où pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de O_K, la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ sur $E \otimes_{O_K} K_{\mathfrak{p}}$ ($K_{\mathfrak{p}}$ étant le complété de K par rapport à la place $\mathfrak{p}$) est induite par la structure de O_K-module de E. Pour tout $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_{O_K}(E)\}$, le $i^{\text{ème}}$ minimum de Roy–Thunder de $\overline{E}$ (cf. [20]) est défini comme

$$\nu_i^{\mathrm{RT}}(\overline{E}) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \operatorname{rg}_K(\operatorname{Vect}_K\{s \in E_K \mid \widehat{\deg}(s) \geqslant t\}) \geqslant i\}. \tag{4.7}$$

On peut aussi définir de façon similaire le degré d'Arakelov pour les vecteurs non nuls dans $E \otimes_{O_K} K^{\mathrm{a}}$, où K^{a} désigne la clôture algébrique de K. Pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}_{O_K}(E)\}$, le $i^{\text{ème}}$ minimum absolu de $\overline{E}$ est défini comme

$$\nu_i^{\mathrm{abs}}(\overline{E}) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mathrm{rg}_{K^{\mathrm{a}}}(\mathrm{Vect}_{K^{\mathrm{a}}}\{s \in E_{K^{\mathrm{a}}} \mid \widehat{\deg}(s) \geqslant t\}) \geqslant i\}.$$

Il n'est pas difficile de voir que (cf. [15, §4] par exemple)

$$\nu_i(\overline{E}) \leqslant \nu_i^{\mathrm{RT}}(\overline{E}) \leqslant \nu_i^{\mathrm{abs}}(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_i(\overline{E})$$

pour tout i. La méthode de comparaison des $\mathbb{R}$-filtrations peut être appliquée à la comparaison de ces invariants. Il est aussi possible d'étendre les résultats de l'article dans le cadre adélique, suivant le chemin indiqué dans [12, §5.4]. Il faut cependant tenir en compte du défaut de pureté et du défaut de hermitianité dans la majoration (voir [13, §2] pour plus de détails).

Comme mentionné dans l'introduction, le rapporteur suggère une amélioration de la majoration (4.5) que je résume comme suit. Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien de rang n sur $\mathrm{Spec}\, O_K$ comme dans la démonstration de la proposition 4.7. Le raisonnement est similaire sauf que l'on identifie le premier minimum $\nu_1(\pi_*(\overline{E})^\vee)$ du réseau euclidien $\pi_*(\overline{E})^\vee$ au premier minimum $\nu_1^{\mathrm{RT}}(\pi_*(\overline{E})^\vee)$ au sens de Roy–Thunder (voir (4.7) pour la définition) en utilisant [15, proposition 4.8] (avec les notations du *loc. cit.* on a $c_1(\mathbb{Q}) = 1$). L'intérêt de ce passage au premier minimum de Roy–Thunder est de pouvoir appliquer le [15, corollaire 4.28] pour obtenir

$$\nu_1(\pi_*(\overline{E})^\vee) = \nu_1^{\mathrm{RT}}(\pi_*(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega}_{O_K/\mathbb{Z}})) \leqslant \nu_1^{\mathrm{RT}}(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega}_{O_K/\mathbb{Z}}) - \frac{1}{2}\ln[K:\mathbb{Q}].$$

Cela permet de gagner un terme $-\frac{1}{2}\ln[K:\mathbb{Q}]$ par rapport à (4.6) et donc conduire à la majoration améliorée

$$\delta(n, K) \leqslant \eth([K:\mathbb{Q}]n, \mathbb{Q}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]} - \frac{1}{2}\ln[K:\mathbb{Q}].$$

On en déduit l'inégalité suivante, via le théorème de transfert de Banasczcyk

$$\delta(n, K) \leqslant \ln(n) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]} + \frac{1}{2}\ln[K:\mathbb{Q}]. \tag{4.8}$$

Les minima de Roy–Thunder sont aussi naturellement liés aux $\mathbb{R}$-filtrations. En effet, si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien non-nul sur $\mathrm{Spec}\, O_K$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{F}_{\mathrm{RT}}^t(\overline{E})$ le sous-espace K-vectoriel de E_K engendré par l'ensemble

$$\{s \in E \mid \widehat{\deg}(s) \geqslant t\}.$$

Ainsi $\mathcal{F}_{\mathrm{RT}}$ définit une $\mathbb{R}$-filtration de E_K et on a

$$\nu_i^{\mathrm{RT}}(\overline{E}) = \sup\{u \in \mathbb{R} \mid \mathrm{rg}_K(\mathcal{F}_{\mathrm{RT}}^u(\overline{E}) \geqslant i)\}.$$

L'avatar de la proposition 2.3 et du théorème 3.7 est encore valable pour les minima de Roy–Thunder. En particulier, si, pour tout entier $n \geqslant 1$ on désigne par $\delta^{\mathrm{RT}}(n, K)$ la borne supérieure des $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) - \nu_n(\overline{F})$, où $\overline{F}$ parcourt l'ensemble des fibrés vectoriels hermitiens de rang n sur $\mathrm{Spec}\, O_K$, alors pour tout fibré vectoriel hermitien non nul $\overline{E}$ sur $\mathrm{Spec}\, O_K$ et tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}_{O_K}(E)\}$ on a

$$\nu_i^{\mathrm{RT}}(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_i(\overline{E}) \leqslant \nu_i^{\mathrm{RT}}(\overline{E}) + \delta^{\mathrm{RT}}(\mathrm{rg}_{O_K}(E), K).$$

Soient n un entier, $n \geqslant 1$, et $\overline{F}$ un fibré vectoriel hermitien de rang n sur $\operatorname{Spec} O_K$. On a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) - \nu_n(\overline{F}) = -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}^\vee) - \nu_n(\overline{F}) \leqslant -\nu_1(\overline{F}^\vee) - \nu_n(\overline{F}).$$

D'après le théorème 36 de [14], on a

$$-\nu_1(\overline{F}^\vee) - \nu_n(\overline{F}) \leqslant \ln(n) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}.$$

Cela conduit à la majoration

$$\delta^{\mathrm{RT}}(n,K) \leqslant \ln(n) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}. \tag{4.9}$$

D'après les propositions 4.8 et 5.1 de [15], pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{F}$ de rang n sur $\operatorname{Spec} O_K$, on a

$$\nu_n^{\mathrm{RT}}(\overline{F}) \leqslant \nu_n(\overline{F}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.$$

On en déduit

$$\delta(n,K) \leqslant \delta^{\mathrm{RT}}(n,K) + \frac{\ln|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]} \leqslant \ln(n) + \frac{3\ln|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}, \tag{4.10}$$

où la seconde inégalité provient de (4.9). La combinaison de (4.8) et (4.10) conduit au théorème 1.1, en s'appuyant sur le théorème 3.7.

5. Applications et commentaires

5.1. Comparaison entre des mesures limites. — Soit $\pi : X \to \operatorname{Spec} O_K$ un morphisme projectif et plat d'un schéma intègre X vers $\operatorname{Spec} O_K$. On appelle *fibré en droites hermitien* sur X tout couple $\overline{L} = (L, \phi)$, où L est un O_X-module inversible et $\phi = (\phi_\sigma)_{\sigma : K \to \mathbb{C}}$ est une famille de métriques continues sur L qui est stable par la conjugaison complexe. On précise que $\phi_\sigma = (|\cdot|_\sigma(x))_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})}$ est une métrique continue sur L_σ, la tirée en arrière de L sur $X_\sigma = X \times_{\operatorname{Spec} O_K, \sigma} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$. L'invariance par la conjugaison complexe signifie que, pour tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$ et tout $x \in X_\sigma(\mathbb{C})$, l'isomorphisme canonique entre $x^*(L_\sigma)$ et $\overline{x}^*(L_{\overline{\sigma}})$ induit une isométrie entre $|\cdot|_\sigma(x)$ et $|\cdot|_{\overline{\sigma}}(\overline{x})$.

Théorème 5.1. — *Soit $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur X. On suppose que la fibre générique de L est* gros*. En d'autres termes, le* volume *de L_K, défini comme*

$$\operatorname{vol}(L_K) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{\dim_K H^0(X_K, L_K^{\otimes n})}{n^{\dim(X_K)}/\dim(X_K)!},$$

est strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\overline{E}_n = (H^0(X, L^{\otimes n}), (\|\cdot\|_{n,\sigma})_{\sigma : K \to \mathbb{C}})$ un fibré vectoriel hermitien dont le O_K-module projectif sous-jacent E_n est égal à $H^0(X, L^{\otimes n})$. On suppose en outre que, pour tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sup_{s \in E_n \otimes_{O_K,\sigma} \mathbb{C}} \Big(\ln \|s\|_{n,\sigma} - \ln \sup_{x \in X_\sigma(\mathbb{C})} |s|_\sigma(x) \Big) = 0. \tag{5.1}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $r_n := \operatorname{rg}_{O_K}(E_n) > 0$, soient

$$\eta_n := \frac{1}{r_n} \sum_{i=1}^{r_n} \delta_{\widehat{\mu}_i(\overline{E}_n)/n} \quad \text{et} \quad \widetilde{\eta}_n := \frac{1}{r_n} \sum_{i=1}^{r_n} \delta_{\nu_i(\overline{E}_n)/n},$$

où pour tout nombre réel t, δ_t désigne la mesure de Dirac en t. Alors les suites de mesures (η_n) et $(\widetilde{\eta}_n)$ convergent vers la même mesure de probabilité borélienne qui ne dépend que de $\overline{L}$.

Démonstration. — Rappelons que la convergence faible d'une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures boréliennes vers une mesure limite λ signifie que, pour toute fonction continue et bornée h, la suite d'intégrales $(\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\lambda_n(\mathrm{d}x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\lambda(\mathrm{d}x)$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\pi_*(\overline{L}^{\otimes n})$ le O_K-module projectif $E_n = H^0(X, L^{\otimes n})$ muni de la famille de normes $(\|\cdot\|_{n,\sigma,\sup})$, où

$$\forall\, s\in E_n\otimes_{O_K,\sigma}\mathbb{C},\quad \|s\|_{n,\sigma,\sup} := \sup_{x\in X_\sigma(\mathbb{C})} |s|_\sigma(x).$$

C'est un fibré vectoriel normé sur $\operatorname{Spec} O_K$. Si r_n est strictement positif, soit

$$\lambda_n = \frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{r_n}\delta_{\nu_i(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n}))/n}.$$

D'après [9, théorème 2.11], les supports des mesures λ_n sont uniformément borné supérieurement et la suite de mesures (λ_n) converge vaguement vers une mesure de probabilité borélienne λ. En d'autres termes, pour toute fonction continue à support compact h sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\lambda_n(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,\lambda(\mathrm{d}x).$$

En outre, d'après [18, Theorem D], les supports des mesures λ_n sont uniformément bornés inférieurement. Donc la suite de mesure (λ_n) converge en fait faiblement vers λ.
Il reste à vérifier que les deux suites (η_n) et $(\widetilde{\eta}_n)$ convergent faiblement vers λ. Le point clé repose sur les estimations suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{i\in\{1,\ldots,r_n\}}\frac{1}{n}\Big|\nu_i(\overline{E}_n)-\nu_i(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n}))\Big| = 0, \tag{5.2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{i\in\{1,\ldots,r_n\}}\frac{1}{n}\Big|\widetilde{\mu}_i(\overline{E}_n)-\nu_i(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n}))\Big| = 0, \tag{5.3}$$

où (5.2) provient de l'hypothèse (5.1), et (5.3) résulte de (5.2), du théorème 1.1 et du fait que $r_n = O(n^{\dim(X)})$ (on souligne que l'inégalité (1.1) de Borek ne suffit pas pour déduire (5.3) de (5.2)).
L'estimation (5.1) montre que les supports des mesures η_n sont uniformément bornés (puisque ceux des mesures λ_n les sont). En particulier, pour montrer que la suite (η_n) converge faiblement vers λ, il suffit de vérifier que, pour toute fonction continue à support compact $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\eta_n(\mathrm{d}x)-\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\lambda_n(\mathrm{d}x)\Big| = 0. \tag{5.4}$$

Par définition on a

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\eta_n(\mathrm{d}x)-\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\lambda_n(\mathrm{d}x) = \frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{r_n}\Big(h\Big(\frac{1}{n}\nu_i(\overline{E}_n)\Big)-h\Big(\frac{1}{n}\nu_i(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n}))\Big)\Big).$$

Donc l'estimation résulte de (5.2) et de la continuité uniforme de h. La convergence faible de $(\widetilde{\eta}_n)$ vers λ découle de (5.3) par le même argument.

Remarque 5.2. — On désigne par $\eta_{\overline{L}}$ la mesure limite dans le théorème précédent. D'après [10, proposition 1.2.9] la suite des polygones normalisés $(t \in [0,1] \to \frac{1}{nr_n} P_{\overline{E}_n}(r_n t))$ converge uniformément vers une fonction concave $P_{\overline{L}}$ sur $[0,1]$ (le polygone associée $\eta_{\overline{L}}$ avec la terminologie de [10, définition 1.2.8]). La mesure $\eta_{\overline{L}}$ est un invariant birationnel, c'est-à-dire que, pour tout morphisme $f : X' \to X$ projectif et birationnel, on a $\eta_{f^*\overline{L}} = \eta_{\overline{L}}$ (cf. [11, proposition 5.2]). Cela implique que la limite $P_{\overline{L}}$ des polygones normalisés est aussi un invariant birationnel du fibré en droites hermitien $\overline{L}$.

5.2. Quelques commentaires. — Soient K un corps de nombres et $\overline{E}$ le fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} O_K$. Soit $r = \operatorname{rg}_{O_K}(E)$. En général, un problème de transfert cherche à majorer $-(\nu_i(\overline{E}) + \nu_{r+1-i}(\overline{E}^\vee))$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Si

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n = E$$

est le drapeau de Harder–Narasimhan de $\overline{E}$, alors

$$0 = (E/E_n)^\vee \subsetneq (E/E_{n-1})^\vee \subsetneq \dots \subsetneq (E/E_1)^\vee \subsetneq (E/E_0)^\vee = E^\vee$$

est le drapeau de Harder–Narasimhan de $\overline{E}^\vee$. En particulier, on a

$$\mu_i(\overline{E}) + \mu_{r+1-i}(\overline{E}^\vee) = 0$$

pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. On en déduit

$$\forall\, i \in \{1, \dots, r\}, \quad -(\nu_i(\overline{E}) + \nu_{r+1-i}(\overline{E}^\vee)) \leqslant 2\delta(r, K).$$

En particulier, on a $\eth(r, K) \leqslant 2\delta(r, K)$. De ce point de vue-là, il est plus raisonnable de conjecturer que $\delta(r, K)$ est majorée par une fonction d'ordre $\frac{1}{2}\ln(r) + O_K(1)$. Plus précisément, le rapporteur relève la question suivante : est-ce que l'inégalité

$$\delta(r, K) \leqslant \frac{1}{2}\ln(r) + \frac{\ln|\Delta_K|}{2[K : \mathbb{Q}]}$$

est vraie ? Une réponse positive à cette question conduira à la majoration uniforme

$$\forall\, i \in \{1, \dots, \operatorname{rg}_{O_K}(E)\}, \quad \widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E}) \leqslant \frac{1}{2}\ln(\operatorname{rg}_{O_K}(E)) + \frac{\ln|\Delta_K|}{2[K : \mathbb{Q}]}$$

pour tout fibré vectoriel hermitien non nul $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec} O_K$. La somme de ces inégalités par rapport à i donne une amélioration importante du deuxième théorème de Minkowski dans le cas de fibré vectoriel hermitien (correspondant aux cas d'ellipsoïdes dans le langage classique) qui est valable pour tout corps de nombres (cf. [15, Proposition 5.1]). En outre, la comparaison à la proposition 29 de [14] conduit naturellement à la question suivante. Soit r un entier, $r > 1$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on désigne par $\delta_i(r, K)$ la borne supérieure de $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E})$, où $\overline{E}$ parcourt l'ensemble des fibrés vectoriels hermitiens de rang r sur $\operatorname{Spec} O_K$. Les inégalités

$$\delta_1(r, K) \leqslant \dots \leqslant \delta_r(r, K)$$

sont-elles vraies ?

5.3. Interprétation géométrique. — Si on se contente de majorer la différence entre les pentes et les minima absolus, on peut transformer le problème dans un cadre géométrique. Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Tout élément non nul s de E_{K^a} détermine une droite dans l'espace vectoriel E_{K^a}, qui correspond à un point algébrique du schéma $\mathbb{P}(E_K)$ que l'on note P_s. En outre, on a

$$\widehat{\deg}(s) = -h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P_s),$$

où la hauteur (absolue) $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}$ est calculée par rapport au modèle entier tautologique $(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$ et les métriques de Fubini–Study sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$.
Rappelons que le *minimum essentiel* de la fonction de hauteur $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}$ est défini comme

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{E}) = \sup_{Z \subsetneq \mathbb{P}(E_K)} \ \inf_{P \in (\mathbb{P}(E_K) \setminus Z)(K^a)} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P),$$

où Z parcourt l'ensemble des parties fermées Zariski strictes de $\mathbb{P}(E_K)$. Il s'avère que

$$\nu^{\mathrm{abs}}_{\min}(\overline{E}) + \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{E}) \geqslant 0.$$

On conjecture que le minimum essentiel $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{E})$ est majoré par la pente maximale $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ plus $\frac{1}{2}\ln(\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E))$. Cette conjecture est vraie lorsque $\overline{E}$ est une somme directe orthogonale de fibrés en droites hermitiens (cf. [7]). Cela conduit à la majoration

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu^{\mathrm{abs}}_i(\overline{E}) \leqslant \frac{1}{2}\ln(\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E))$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, en utilisant la méthode proposée dans cet article (il suffit de remplacer la $\mathbb{R}$-filtration par minima par la $\mathbb{R}$-filtration par hauteur, cf. [6, §3.2]).
Plus généralement, on peut considérer le problème suivant. Soient $f : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un morphisme projectif et plat d'un schéma intègre $\mathscr{X}$ vers $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample, que $\mathscr{L}$ soit relativement nef et que les métriques de $\overline{\mathscr{L}}$ soient semi-positives. La donnée de $\overline{\mathscr{L}}$ permet de définir une fonction de hauteur (logarithmique et absolue) $h_{\overline{\mathscr{L}}}(\cdot)$ sur l'ensemble des points algébrique de $\mathscr{X}_K$. Soit $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathscr{L}})$ le minimum essentiel associé à cette fonction de hauteur, définie comme

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathscr{L}}) := \sup_{Z \subsetneq \mathscr{X}_K} \ \inf_{P \in (\mathscr{X}_K \setminus Z)(K^a)} h_{\overline{\mathscr{L}}}(P)$$

On conjecture que le minimum essentiel $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathscr{L}})$ peut être majoré par la limite

$$\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{\widehat{\mu}_{\max}(f_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}))}{n}$$

plus une fonction du degré de $\mathscr{L}_K$. On revoie les lecteurs au §4.2 de [10] pour une étude de l'invariant $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\cdot)$.

Références

[1] W. Banaszczyk, « New bounds in some transference theorems in the geometry of numbers », *Math. Ann.* **296** (1993), n° 4, p. 625-635.

[2] T. Borek, « Successive minima and slopes of Hermitian vector bundles over number fields », *J. Number Theory* **113** (2005), n° 2, p. 380-388.

[3] J.-B. Bost, « Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz) », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95*, Astérisque, vol. 237, Société Mathématique de France, 1996, p. 115-161.

[4] ———, « Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* (2001), n° 93, p. 161-221.

[5] J.-B. Bost & K. Künnemann, « Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic schemes. I. Geometry of numbers », *Adv. Math.* **223** (2010), n° 3, p. 987-1106.

[6] S. Boucksom & H. Chen, « Okounkov bodies of filtered linear series », *Compos. Math.* **147** (2011), n° 4, p. 1205-1229.

[7] J. I. Burgos Gil, P. Philippon & M. Sombra, « Successive minima of toric height functions », *Ann. Inst. Fourier* **65** (2015), n° 5, p. 2145-2197.

[8] H. Chen, « Géométrie d'Arakelov : théorèmes de limite et comptage des points rationnels », Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot, 2011.

[9] ———, « Arithmetic Fujita approximation », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **43** (2010), n° 4, p. 555-578.

[10] ———, « Convergence des polygones de Harder-Narasimhan », *Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér.* (2010), n° 120, p. 116.

[11] ———, « Differentiability of the arithmetic volume function », *J. Lond. Math. Soc.* **84** (2011), n° 2, p. 365-384.

[12] É. Gaudron, « Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global », *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **119** (2008), p. 21-95.

[13] ———, « Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés », *Manuscr. Math.* **130** (2009), n° 2, p. 159-182.

[14] ———, « Minima and slopes of rigid adelic spaces », Notes de cours de l'école d'été « *Géométrie d'Arakelov et applications diophantiennes* », Grenoble, 2017.

[15] É. Gaudron & G. Rémond, « Corps de Siegel », *J. Reine Angew. Math.* **726** (2017), p. 187-247.

[16] D. R. Grayson, « Reduction theory using semistability », *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), n° 4, p. 600-634.

[17] G. Harder & M. S. Narasimhan, « On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves », *Math. Ann.* **212** (1974/75), p. 215-248.

[18] H. Ikoma, « Boundedness of the successive minima on arithmetic varieties », *J. Algebr. Geom.* **22** (2013), n° 2, p. 249-302.

[19] R. Lazarsfeld & M. Mustaţă, « Convex bodies associated to linear series », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **42** (2009), n° 5, p. 783-835.

[20] D. Roy & J. L. Thunder, « An absolute Siegel's lemma », *J. Reine Angew. Math.* **476** (1996), p. 1-26, addendum and erratum in *ibid.* **508** (1999), p. 47-51.

[21] C. Soulé, « Hermitian vector bundles on arithmetic varieties », in *Algebraic geometry (Santa Cruz 1995)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 62, American Mathematical Society, 1997, p. 383-419.

[22] U. Stuhler, « Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischer Formen », *Arch. Math.* **27** (1976), n^{o} 6, p. 604-610.

Huayi Chen, Université Paris Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, Bâtiment Sophie Germain, Boîte Courrier 7012, 75205 Paris Cedex 13, France • *E-mail :* huayi.chen@imj-prg.fr
Url : webusers.imj-prg.fr/~huayi.chen