

THEORIE DES NOMBRES

- Besançon -

Année 1976-77

ETUDE DU \mathcal{O} -MODULE $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathcal{O}_K$ POUR UNE EXTENSION K/\mathbb{Q}
ABELIENNE DE GROUPE G , AVEC \mathcal{O} ORDRE MAXIMAL DE $\mathbb{Q}[G]$,
 \mathcal{O}_K ANNEAU ENTIERS DE K .

Danièle CHATELAIN

Faculté des Sciences. Mathématiques

ERA. CNRS N°070654

25 030 BESANCON Cedex

Etude du \mathcal{O} -module $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} [\mathbb{Q}] \mathcal{O}_K$ pour une extension K/\mathbb{Q} abélienne de groupe G , avec \mathcal{O} ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$, \mathcal{O}_K anneau des entiers de K .

par Danièle CHATELAIN

Introduction. - Soit K/\mathbb{Q} une extension galoisienne, \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K , $G = \text{gal}(K/\mathbb{Q})$. Pour étudier les propriétés entières et galoisiennes de \mathcal{O}_K , il est naturel de le considérer comme module par rapport à un sous-anneau de $\mathbb{Q}[G]$ contenant G et entier sur \mathbb{Z} , c'est-à-dire par rapport à un ordre de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$.

\mathcal{O}_K a une structure naturelle de A -module pour tout anneau A contenu dans $\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{Q}[G] / \lambda \cdot \mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_K \}$. On montre que Λ est un ordre de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$. C'est par définition l'ordre associé à \mathcal{O}_K . Pour les structures de $\mathbb{Z}[G]$ ou de Λ -module de \mathcal{O}_K , on a les principaux résultats suivants :

K/\mathbb{Q} modérément ramifiée $\Leftrightarrow \mathcal{O}_K$ est $\mathbb{Z}[G]$ projectif $\Leftrightarrow \Lambda = \mathbb{Z}[G]$

(cf [M], [J])

K/\mathbb{Q} abélienne $\Rightarrow \mathcal{O}_K$ est Λ -libre (cf [L])

Il est intéressant également, de considérer le \mathcal{O} -module $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} [\mathbb{Q}] \mathcal{O}_K$ associé à \mathcal{O}_K , lorsque \mathcal{O} est un ordre maximal de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Q}[G]$, à cause des théorèmes de structures des modules de type fini sur un ordre maximal. Tout \mathcal{O} -module de type fini M s'écrit $M = P \oplus T$, où P est un \mathcal{O} -module projectif de type fini et T un sous \mathcal{O} -module égal à la \mathbb{Z} -torsion (\mathcal{O} -tor-

sion" par définition).

Ici on a : $O_{\mathbb{Z}[G]} \otimes_{\mathbb{Z}} O_K \simeq O \cdot O_K \oplus T$

où T est un groupe fini dont l'ordre n'est divisible que par les idéaux premiers sauvagement ramifiés dans K/\mathbb{Q} (cf. [C-1]) et $O \cdot O_K$ est O -projectif.

On peut penser ("conjecture de Martinet") que l'image de $O_{\mathbb{Z}[G]} \otimes_{\mathbb{Z}} O_K$ dans le groupe de Grothendieck $G_0(O)$ des O -modules de type fini est l'élément neutre.

La conjecture est vraie lorsque K est modérément ramifiée (cf. [F]) et alors $T=0$, ou lorsque G est un p -groupe (cf. [C-2]) ou un groupe non abélien d'ordre $p \cdot q$ (cf. [C-1]).

Dans le cas où G est abélien, $O \cdot O_K$ est O -libre. On vérifie dans cet exposé que l'image de T dans $G_0(O)$ est également l'élément neutre : la conjecture est donc vraie pour les extensions abéliennes de \mathbb{Q} .

Remarque. Soient $O_{\bar{x}}$ les ordres maximaux des facteurs simples de $\mathbb{Q}[G]$. On a : $O_{\mathbb{Z}[G]} \otimes_{\mathbb{Z}} O_K = \bigoplus_{\bar{x}} (O_{\bar{x}} \otimes_{\mathbb{Z}} O_K)$ et $G_0(O) \simeq \bigoplus_{\bar{x}} G_0(O_{\bar{x}})$. L'image de $O_{\mathbb{Z}[G]} \otimes_{\mathbb{Z}} O_K$ dans $G_0(O)$ est la somme des images de $O_{\bar{x}} \otimes_{\mathbb{Z}} O_K$ dans $G_0(O_{\bar{x}})$. On se ramène donc à l'étude des $O_{\bar{x}}$ -modules $O_{\bar{x}} \otimes_{\mathbb{Z}} O_K$.

1. Rappels sur la structure de O_K et les caractères de ramification lorsque K/\mathbb{Q} est abélienne ([L]).

1°) Notations : Soit P l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans K et soit $f = \prod_{p \in P} p^{r_p}$ le conducteur de K ($r_p \geq 1$).

Soit $G^1(p)$ le premier groupe de ramification de p dans K (pour $p \in P$) et Ω/\mathbb{Q} la sous extension modérément ramifiée maximale de K/\mathbb{Q} . On pose $H = \text{gal}(K/\Omega)$. On a : $H = \prod_p G^1(p)$.

Pour $p \neq 2$, $G^1(p)$ est cyclique d'ordre p^{r_p-1} .

Pour $p = 2$, $G^1(2)$ a deux structures possibles ce qui conduit à distinguer

deux types de corps abéliens.

Si $G^2(2)$ est le deuxième groupe de ramification (en notation supérieure), $G^2(2)$ est toujours cyclique, d'ordre 2^{r_2-2} si f est pair, (et d'ordre 1 si f est impair).

Définition du type des corps abéliens.

On dit que K est de type I si f est multiple de 4 et si $G^1(2) \neq G^2(2)$. Alors le corps des genres de K contient $\mathbb{Q}(i)$ et $G^1(2) = \langle \sigma_0 \rangle$. $G^2(2)$ est de type $(2, 2^{r_2-2})$. Le groupe H est non cyclique sauf si $r_2 = 2$.

On dit que K est de type II si $G^1(2) = G^2(2)$. Alors le corps des genres de K ne contient pas $\mathbb{Q}(i)$. Si f est pair, il est alors multiple de 8 et $G^1(2) = G^2(2)$ est cyclique d'ordre 2^{r_2-2} . Le groupe H est cyclique.

Remarque.

Soit χ un caractère complexe irréductible de $G = \text{gal}(K/\mathbb{Q})$. Soit K_χ le corps fixe de $\text{Ker } \chi$. L'extension K_χ/\mathbb{Q} étant cyclique, le corps K_χ est toujours de type II sauf dans le cas où la 2-composante $F_\chi^{(2)}$ du conducteur f_χ de χ vaut 4.

2. Caractères rationnels irréductibles de G et ordre maximal O .

Soit χ un caractère complexe irréductible de G . La somme des caractères conjugués de χ est un caractère rationnel irréductible de G , noté $\bar{\chi}$. On dira que $\bar{\chi}$ est au-dessus de χ ou que χ est sous $\bar{\chi}$. On a $\text{Ker } \bar{\chi} = \text{ker } \chi$. Si $K_{\bar{\chi}}$ est le corps fixe de $\text{Ker } \bar{\chi}$, on pose $g_{\bar{\chi}} = [K_{\bar{\chi}} : \mathbb{Q}]$. On note $1_{\bar{\chi}}$ l'idempotent de $\mathbb{Q}[G]$ associé à $\bar{\chi}$ ($1_{\bar{\chi}} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar{\chi}(\sigma^{-1}) \sigma$)

G étant abélien, il y a un seul ordre maximal de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Q}[G]$ qui est

$O = \bigoplus_{\bar{\chi}} \mathbb{Z}[G] 1_{\bar{\chi}}$. On pose $O_{\bar{\chi}} = \mathbb{Z}[G] 1_{\bar{\chi}}$; c'est l'ordre maximal du facteur

simple $\mathbb{Q}[G] 1_{\bar{\chi}}$.

A chaque caractère complexe χ sous $\bar{\chi}$, on peut associer l'isomorphisme φ_{χ} de $\mathbb{Q}[G] 1_{\bar{\chi}}$ dans $\mathbb{Q}^{(g_{\bar{\chi}})}$ défini par

$$\varphi_{\chi} \left(\sum_{\sigma \in G} \lambda_{\sigma} \sigma \right) = \sum_{\sigma \in G} \lambda_{\sigma} \chi(\sigma)$$

(qui vérifie $\varphi_{\chi}(1_{\bar{\chi}}) = 1$).

Par l'un quelconque de ces isomorphismes $O_{\bar{\chi}}$ est isomorphe à l'anneau de Dedekind $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ et le groupe de Grothendieck $G_o(O_{\bar{\chi}})$ est isomorphe au groupe des classes d'idéaux de $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$.

3. Caractères de ramification et ordre Λ associé à O_K .

On a $\Lambda = \bigoplus_{\mathfrak{f}} \mathbb{Z}[G] 1_{\mathfrak{f}}$, où $1_{\mathfrak{f}}$ est l'idempotent de $\mathbb{Q}[G]$ associé au caractère de ramification \mathfrak{f} de K . Rappelons comment ces caractères sont définis.

Classes de caractères semblables. On dit que 2 caractères (complexes irréductibles) χ et χ' de G sont semblables si leurs conducteurs ont même facteurs multiples.

Soient Ω_{χ} et $\Omega_{\chi'}$, les sous extensions modérées maximales de K_{χ} et de $K_{\chi'}$, il est équivalent de dire que les extensions K_{χ}/Ω_{χ} et $K_{\chi'}/\Omega_{\chi'}$ sont isomorphes et que K_{χ} et $K_{\chi'}$ sont de même type.

Définition des caractères de ramification.

Un caractère de ramification \mathfrak{f} de K est la somme des caractères d'une même classe de caractères semblables.

Il est clair que deux caractères conjugués sont semblables et

donc que ϕ est somme de caractères rationnels $\bar{\chi}$ de G (on dira que ϕ est au dessus de $\bar{\chi}$ ou que $\bar{\chi}$ est sous ϕ).

Détermination des caractères de ramification par leurs noyaux et idempotents associés.

Proposition.- On note K_ϕ le corps fixe du noyau $\text{Ker } \phi$ de ϕ .

(i) On suppose K de type I. On pose $H^* = G^2(2) \times_{p \neq 2} \prod G^1(p)$ et on note

Ω^* le corps fixe de H^* (H^* est cyclique). On distingue deux sortes de caractères de ramification :

a) Les caractères de ramification définis à partir des caractères χ tels que $8 \mid f_\chi^{(2)}$ sont dits de 1ère espèce. Ce sont les caractères induits par les caractères rationnels irréductibles ψ de H dont le noyau contient $G^2(2)$. On a $\text{Ker } \phi = \text{Ker } \psi$, $1_\phi = 1_\psi$ et $K_\phi / \Omega \approx K_\chi / \Omega_\chi$.

Si $f_\chi^{(2)} = 4$, K_ϕ est compris entre le corps fixe de $G^2(2)$ et Ω^* .

Si $f_\chi^{(2)} = 1$, K_ϕ est compris entre le corps fixe de $G^1(2)$ et Ω .

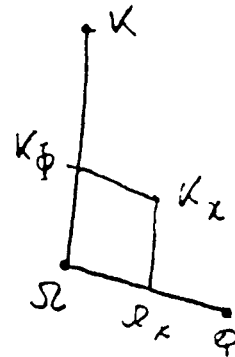
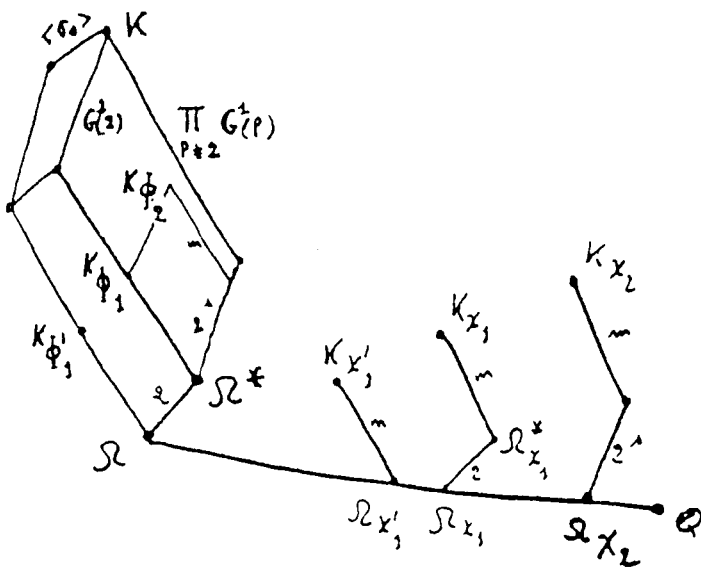
b) Les caractères de ramification définis à partir des caractères χ tels que $8 \nmid f_\chi^{(2)}$ sont dits de 2ème espèce. Ce sont les caractères induits par les caractères rationnels irréductibles ψ de H^* dont le noyau ne contient pas $G^2(2)$. On a $\text{Ker } \phi = \text{Ker } \psi$, $1_\phi = 1_\psi$ et $K_\phi / \Omega^* \approx K_\chi / \Omega_\chi$.

(ii) On suppose K de type II. Les caractères de ramification ϕ de G sont induits par les caractères rationnels irréductibles ψ de H . On a $\text{Ker } \phi = \text{Ker } \psi$, $1_\phi = 1_\psi$ et $K_\phi / \Omega \approx K_\chi / \Omega_\chi$.

.../...

K de type I

K de type II



$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{x_1 \in \text{cl } x_1} \\ \phi_1' &= \sum x_1' \end{aligned} \right\} \text{1ère espèce} \quad \phi_2 = \sum_{x_2 \in \text{cl } x_2} x_2 \quad : \text{2ème espèce}$$

4. Hauptsatz de Leopoldt:

(i) L'ordre Λ associé à O_K est $\Lambda = \bigoplus_{\phi} Z[\sigma] 1_{\phi}$, où ϕ décrit l'ensemble des caractères de ramification de K .

(ii) On pose pour tout caractère de ramification ϕ de K ,

$$T_{K, \phi} = \frac{1}{[K_{\phi} : \mathbb{Q}]} \left(\sum_{\chi \in \phi} \mu\left(\frac{f_{\phi}}{f_{\chi}}\right) \chi\left(\frac{f_{\phi}}{f_{\chi}}\right) \zeta(\chi) \right)$$

où χ est le caractère résiduel de K , identifié au caractère χ de G , $\zeta(\chi)$ est la somme de Gauss normée primitive relative à χ , f_{ϕ} le conducteur de K_{ϕ} (égal au PPCM des conducteurs f_{χ} des caractères χ dont ϕ est la somme), μ la fonction de Möbius..

$T_{K, \phi}$ est un entier de K_{ϕ} , corps fixe de $\text{Ker } \phi$.

On pose $T_K = \sum_{\phi} T_{K, \phi}$

T_K est un entier de K tel que $O_K = \Lambda \cdot T_K$

et on a $T_K \cdot 1_{\phi} = T_{K, \phi} \in K_{\phi}$ et $O_K = \bigoplus_{\phi} \mathbb{Z}[G] T_{K, \phi}$

Remarque.

O_K est somme directe des $\mathbb{Z}[G]$ modules monogènes $\mathbb{Z}[G] T_{K, \phi}$ qui ont la propriété d'être indécomposables.

Expression d'une \mathbb{Z} base de $\mathbb{Z}[G] \cdot T_{K, \phi}$

Soit ϕ un caractère de ramification de G , on note :

$$\Omega_{\phi} = \begin{cases} \Omega^* & \text{si } K \text{ est de type I et } \phi \text{ de 2ème espèce} \\ \Omega & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } h_{\phi} = [K_{\phi} : \Omega_{\phi}]$$

On note s_{ϕ} un élément de $\text{gal}(K/\Omega_{\phi})$ dont la restriction à K_{ϕ} engendre $\text{gal}(K_{\phi}/\Omega_{\phi})$ et T un système de représentants dans G de $\text{gal}(\Omega_{\phi}/\mathbb{Q})$.

Alors $\mathbb{Z}[G] T_{K, \phi}$ admet pour \mathbb{Z} -base

$$\{ T_{K, \phi} \cdot t \cdot s_{\phi}^i ; t \in T, 0 \leq i < \varphi(h_{\phi}) \}$$

II. Décomposition du $\mathbb{Z}^{\overline{\chi}}$ -module $O_{\overline{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] O_K$

Méthode.

D'après le théorème de Leopoldt on a

$$O_{\overline{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] O_K = \bigoplus_{\phi} O_{\overline{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] T_{K, \phi}$$

Le module $O_{\overline{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \mathbb{Z}[G] T_{K, \phi}$ est $\mathbb{Z}[G]$ monogène, engendré par

$$1_{\overline{\chi}} \otimes T_{K, \phi}.$$

Soit χ un caractère complexe de G sous $\bar{\chi}$ et ψ_χ l'homomorphisme de $Z[G]$ sur $Z^{(g_{\bar{\chi}})}$ associé; ($\psi_\chi(\sum \lambda_\sigma \sigma) = \sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \chi(\sigma)$, sa restriction φ_χ à $O_{\bar{\chi}}$ est un isomorphisme).

On a les isomorphismes :

$$O_{\bar{\chi}} \otimes_{Z[G]} Z[G] \cdot T_{K, \mathfrak{f}} \approx \frac{Z[G]}{\text{Ker } \psi_\chi} \otimes_{Z[G]} Z[G] \cdot T_{K, \mathfrak{f}} \approx \frac{Z[G]}{\text{Ker } \psi_\chi + I_{\mathfrak{f}}} \approx \frac{Z^{(g_{\bar{\chi}})}}{\psi_\chi(I_{\mathfrak{f}})}$$

avec $I_{\mathfrak{f}} = \{ \lambda \in Z[G] / \lambda \cdot T_{K, \mathfrak{f}} = 0 \}$

Ces isomorphismes concernent les structures de modules sur $Z[G]$, ou sur $O_{\bar{\chi}} \approx Z^{(g_{\bar{\chi}})}$.

On va donc calculer $I_{\mathfrak{f}}$ et $J_{\chi, \mathfrak{f}} = \psi_\chi(I_{\mathfrak{f}})$ et vérifier que ce dernier idéal est un idéal principal de $Z^{(g_{\bar{\chi}})}$, (indépendant du choix de χ sous $\bar{\chi}$).

Lemme 1.

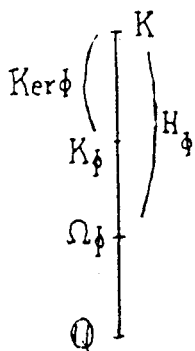
Les notations sont celles du §1.4.

(i) L'annulateur $I_{\mathfrak{f}}$ de $T_{K, \mathfrak{f}}$ dans $Z[G]$ est l'idéal de $Z[G]$ engendré par les éléments $\tau - 1$ pour $\tau \in \text{Ker } \mathfrak{f}$ et par l'élément $P_{h_{\mathfrak{f}}}(s_{\mathfrak{f}})$ (où $P_{h_{\mathfrak{f}}}(X)$ est le $h_{\mathfrak{f}}$ ième polynôme cyclotomique de $\mathbb{Q}[X]$).

(ii) L'image $J_{\chi, \mathfrak{f}}$ de $I_{\mathfrak{f}}$ par l'homomorphisme ψ_χ de $Z[G]$ dans $Z^{(g_{\bar{\chi}})}$, associé au caractère χ sous $\bar{\chi}$, est la somme de l'idéal J_1 de $Z^{(g_{\bar{\chi}})}$ engendré par les éléments $\chi(\tau) - 1$ pour $\tau \in \text{Ker } \mathfrak{f}$, et de l'idéal J_2 engendré par l'élément $P_{h_{\mathfrak{f}}}(\chi(s_{\mathfrak{f}}))$.

.../...

Démonstration.



Rappelons que ϕ est le caractère de G induit par un caractère rationnel irréductible ψ de $H_{\phi} = \text{gal}(K/\Omega_{\phi})$ (avec $\Omega_{\phi} = \Omega$ ou Ω^* selon l'espèce de ϕ) et que $1_{\phi} = 1_{\psi}$, $\text{Ker } \phi = \text{Ker } \psi$.

Si s_{ϕ} est un élément de H_{ϕ} dont la restriction à K_{ϕ} engendre $\text{gal}(K_{\phi}/\Omega_{\phi})$, l'élément $1_{\phi} s_{\phi}$ est une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de 1 dans le corps $\mathbb{Q}[H_{\phi}]1_{\phi}$, (isomorphe à $\mathbb{Q}^{(n)}$, avec $n = h_{\phi} = [K_{\phi} : \Omega_{\phi}]$) (propriétés élémentaires des caractères rationnels irréductibles).

Soit P_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique (de $\mathbb{Q}[X]$). On a : $P_n(1_{\phi} s_{\phi}) = 0$ et pour tout $j \in [\varphi(n), n[$, il existe un unique polynôme

$$P_{n,j}(X) = \sum_{k=0}^{\varphi(n)-1} \lambda_{kj} X^k, \text{ de degré inférieur ou égal à } \varphi(n)-1, \text{ tel que :}$$

$$(1) (1_{\phi} s_{\phi})^j = P_{n,j}(1_{\phi} s_{\phi}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{kj} (1_{\phi} s_{\phi})^k$$

Soit T un système de représentants dans G de $\text{gal}(\Omega_{\phi}/\mathbb{Q})$.

On calcule $I_{\phi} = \text{Ann}_{\mathbb{Z}[G]} T_{K,\phi}$ en écrivant que l'on a :

$$G = \bigcup_{\substack{t \in T \\ 0 \leq j < n}} t s_{\phi}^j \cdot \text{Ker } \phi$$

et que les éléments $\{ T_{K,\phi} t \cdot s_{\phi}^k ; t \in T, 0 \leq k < \varphi(n) \}$ sont \mathbb{Z} indépendants.

Soit $\lambda \in \mathbb{Z}[G]$ tel que $\lambda \cdot T_{K,\phi} = 0$.

λ s'écrit de manière unique :

$$(2) \lambda = \sum_{\substack{t \in T \\ 0 \leq j < n \\ \zeta \in \text{Ker } \phi}} a_{t,s_{\phi}^j,\zeta} t \cdot s_{\phi}^j \cdot \zeta \text{ avec } a_{t,s_{\phi}^j,\zeta} \in \mathbb{Z}.$$

En tenant compte du fait que $T_{K, \phi} \in K_{\phi}$, corps fixe de $\text{Ker } \phi$ on a :

$$(3) \lambda \cdot T_{K, \phi} = \sum_{\substack{t \in T \\ 0 \leq j < n \\ \tau \in \text{Ker } \phi}} a_{t \cdot s_{\phi}^j \cdot \tau} s_{\phi}^j T_{K, \phi}.$$

On a $T_{K, \phi} = 1_{\phi} T_K = 1_{\phi} T_{K, \phi}$, donc $s_{\phi}^j T_{K, \phi} = (1_{\phi} s_{\phi})^j T_{K, \phi}$.

En remplaçant dans la somme (3) les termes correspondant à $\phi(n) \leq j < n$ par leur expression déduite de la relation (1), il vient :

$$\lambda \cdot T_{K, \phi} = \sum_{\substack{t \in T \\ 0 \leq k < n \\ \tau \in \text{Ker } \phi}} \left(a_{t \cdot s_{\phi}^k \cdot \tau} + \sum_{j=\phi(n)}^{n-1} \lambda_{kj} a_{t \cdot s_{\phi}^j \cdot \tau} \right) t \cdot s_{\phi}^k \cdot T_{K, \phi} = 0.$$

D'après l'indépendance linéaire sur Z des éléments

$\{t \cdot s_{\phi}^k \cdot T_{K, \phi} ; t \in T ; 0 \leq k < \phi(n)\}$ on a :

$$\forall t \in T, \forall k \in [0, \phi(n)[, \sum_{\tau \in \text{Ker } \phi} \left(a_{t \cdot s_{\phi}^k \cdot \tau} + \sum_{j=\phi(n)}^{n-1} \lambda_{kj} \cdot a_{t \cdot s_{\phi}^j \cdot \tau} \right) = 0$$

Soit

$$\forall t \in T, \forall k \in [0, \phi(n)[, a_{t \cdot s_{\phi}^k} = - \sum_{\tau \in \text{Ker } \phi} \tau^{-1} a_{t \cdot s_{\phi}^k \cdot \tau} - \sum_{\substack{\tau \in \text{Ker } \phi \\ j = [\phi(n), n[}} \lambda_{kj} \cdot a_{t \cdot s_{\phi}^j \cdot \tau}$$

En reportant dans la relation (2), on trouve que λ est nécessairement de la forme :

$$\lambda = \sum_{\substack{t \in T \\ k \in [0, \phi(n)[\\ \tau \in \text{Ker } \phi - 1}} a_{t \cdot s_{\phi}^k} (\tau - 1) \cdot t \cdot s_{\phi}^k + \sum_{\substack{t \in T \\ \tau \in \text{Ker } \phi \\ \phi(n) \leq j < n}} a_{t \cdot s_{\phi}^j} \tau \left(t \cdot s_{\phi}^j \cdot \tau - \sum_{0 \leq k < \phi(n)} \lambda_{kj} t \cdot s_{\phi}^k \right)$$

Le polynôme $P_{n,j}(X) - X^j$ s'annule pour $X = 1_{\phi} \cdot s_{\phi}$, donc est multiple de

$$P_n(X) : P_{n,j}(X) = X^j + Q_j(X) \cdot P_n(X)$$

$$\text{D'où : } s_{\phi}^j \cdot \tau - \sum_{0 \leq k < \phi(n)} \lambda_{kj} \cdot s_{\phi}^k = s_{\phi}^j \tau - P_{n,j}(s_{\phi}) = s_{\phi}^j (\tau - 1) - Q_j(s_{\phi}) P_n(s_{\phi})$$

On en déduit que λ appartient à l'idéal de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par les éléments $\mathcal{C}-1$ (pour $\mathcal{C} \in \text{Ker } \phi$) et $P_n(s_\phi)$.

Inversement, $(\mathcal{C}-1)T_{K,\phi} = 0$ pour $\mathcal{C} \in \text{Ker } \phi$

$$P_n(s_\phi)T_{K,\phi} = P_n(1_\phi s_\phi)T_{K,\phi} = 0$$

On a donc bien :

$$I_\phi = \text{Ann}_{\mathbb{Z}[G]} T_{K,\phi} = (\mathcal{C}-1, P_n(s_\phi); \mathcal{C} \in \text{Ker } \phi)$$

D'où $J_{\chi,\phi} = \psi_\chi(I_\phi) = (\chi(\mathcal{C})-1, P_n(\chi(s_\phi)); \mathcal{C} \in \text{Ker } \phi)$

$$J_{\chi,\phi} = J_1 + J_2 \text{ avec } J_1 = (\chi(\mathcal{C})-1; \mathcal{C} \in \text{Ker } \phi) \mathbb{Z}^{\binom{g-1}{\chi}}$$

$$J_2 = P_{h_\phi}(\chi(s_\phi)) \cdot \mathbb{Z}^{\binom{g-1}{\chi}}$$

Le lemme suivant permet alors de calculer J_1 et J_2 , en généralisant les résultats classiques suivants :

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, ζ_m désigne un élément de \mathbb{C} qui est racine primitive $m^{\text{ième}}$ de 1 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ P_n est le $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique de $\mathbb{C}[X]$.

. Si m est primaire c'est-à-dire $m = p^s$ avec p premier, $s \geq 1$, $\zeta_m - 1$ engendre l'idéal premier de $\mathbb{Z}^{(m)}$ au dessus de p .

. Si m est non primaire, et $m \neq 1$, $\zeta_m - 1$ est une unité de $\mathbb{Z}^{(m)}$ (et pour $m = 1$ $\zeta_m - 1 = 0$).

. $P_n(1) = 1$ si n est non primaire et $n \neq 1$

. $P_1(1) = 0$

. si $n = p^s$ ($s \geq 1$ p premier) $P_n(1) = p$.

Lemme 2.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, la notation ζ_m désignera un élément de \mathbb{C} qui est racine primitive $m^{\text{ième}}$ de 1. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X)$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique de $\mathbb{C}[X]$.

(i) $P_n(\zeta_m) = 0$ si et seulement si $n = m$.

(ii) si $n \neq m$, $P_n(\zeta_m)$ est une unité de $Z^{(m)}$ sauf dans les cas suivants :

(a) $m = p^s \cdot n$ (p premier, $s \geq 1$) et alors :

$$P_n(\zeta_m) \cdot Z^{(m)} = (\zeta_{p^{s+1}} - 1)^{p-1} \cdot Z^{(m)} \quad \text{si } p \mid n$$

$$= (\zeta_{p^s} - 1) \cdot Z^{(m)} \quad \text{si } p \nmid n$$

(b) $n = p^s \cdot m$ (p premier, $s \geq 1$) et alors :

$$P_n(\zeta_m) \cdot Z^{(m)} = (p) \cdot Z^{(m)}$$

Démonstration.

(i) évident

(ii) on pose $\begin{cases} m = m' \alpha \\ n = n' \alpha \end{cases}$ avec $(m', n') = 1$ et on a nécessairement $n' \neq m'$

Le polynôme $P_n(X)$ divise $X^n - 1$ et $P_{n'}(X^m)$ (on compare les racines).

Donc $P_n(\zeta_m)$ divise $\zeta_m^n - 1 = \zeta_{m'} - 1$, et $P_{n'}(1)$.

En tenant compte de $n' \neq m'$, $(n', m') = 1$ et des valeurs de $\zeta_{m'} - 1$ et $P_{n'}(1)$ rappelées précédemment, il est clair que les seuls cas où $P_n(\zeta_m)$ n'est pas une unité de $Z^{(m)}$ sont :

$$\begin{cases} m' = p^s \\ m' = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m' = 1 \\ n' = p^t \end{cases}$$

1er cas : $m' = p^s$ et $n' = 1$, soit $m = p^s n$ ($s \geq 1$ p premier)

On a : $P_n(X) = \prod_{k/n} (X^{n/k} - 1)^{\mu(k)}$ (μ fonction de Möbius)

d'où : $P_n(\zeta_m) = \prod_{k/n} (\zeta_{p^s n}^{n/k} - 1)^{\mu(k)}$ et tous les termes écrits ont bien un

sens car $\zeta_{p^s n}^{n/k} - 1 = \zeta_{p^s k} - 1 \neq 0$ car $s \geq 1$.

Dans cette expression de $P_n(\zeta_m)$, les seuls termes qui ne sont pas des unités correspondent à $k = 1$ ou $k = p$; ce dernier cas ne se produit que si p/n .

Donc si $p \nmid n$: $P_n(\zeta_m) \cdot Z^{(m)} = (\zeta_{p^s} - 1) \cdot Z^{(m)}$

si p/n : $P_n(\zeta_m) \cdot Z^{(m)} = \left(\frac{\zeta_{p^s} - 1}{\zeta_{p^{s+1}} - 1} \right) \cdot Z^{(m)} = (\zeta_{p^{s+1}} - 1)^{p-1} \cdot Z^{(m)}$

2ième cas : $m' = 1$ et $n' = p^t$; soit $n = p^t \cdot m$ ($t \geq 1$, p premier)

Posons $m = p^s \cdot \alpha$ ($s \geq 0$, $(\alpha, p) = 1$).

$P_n(X)$ divise $P_{p \cdot \alpha}(X^{p^{s+t-1}})$ (on compare les racines).

Mais ces polynômes sont unitaires et ont même degré :

$$\varphi(n) = \varphi(p^{s+t}) \cdot \varphi(\alpha) = p^{s+t-1} \cdot \varphi(p) \cdot \varphi(\alpha)$$

Ils sont donc égaux et $P_n(\zeta_m) = P_{p \cdot \alpha}(\zeta_{p^s \cdot \alpha}^{p^{s+t-1}}) = P_{p \cdot \alpha}(\zeta_\alpha)$

(on a posé $\zeta_\alpha = \zeta_{p^s \cdot \alpha}^{p^{s+t-1}} \dots$)

Or $P_{p \cdot \alpha}(X) = \prod_{k/p \cdot \alpha} (X^{p\alpha/k} - 1)^{\mu(k)} = P_p(X^\alpha) \prod_{\substack{k/\alpha \\ k \neq 1}} (X^{p\alpha/k} - 1)^{\mu(k)}$

D'où $P_n(\zeta_m) = P_p(1) \cdot \prod_{\substack{k/\alpha \\ k \neq 1}} (\zeta_\alpha^{p \cdot \alpha/k} - 1)^{\mu(k)}$: expression qui a un sens

car $(\zeta_\alpha^{p \cdot \alpha/k} - 1)$ est non nul pour $k \neq 1$ et $(k, p) = 1$.

Calcul de $J_{\chi, \mathfrak{F}}$.

On a $J_{\chi, \mathfrak{F}} = J_1 + J_2$ avec J_1 idéal de $Z^{\frac{(g_-)}{X}}$ engendré par les éléments $\chi(\mathcal{Z}) - 1$ pour $\mathcal{Z} \in \text{Ker } \mathfrak{F}$ et $J_2 = \left(P_{h_{\mathfrak{F}}}(\chi(s_{\mathfrak{F}})) \right)$ ($h_{\mathfrak{F}}$ et $s_{\mathfrak{F}}$ sont définis au § 1.4).

Soit $\Omega_{\bar{X}}$ la sous extension modérée maximale de $K_{\bar{X}}/\mathbb{Q}$ (où

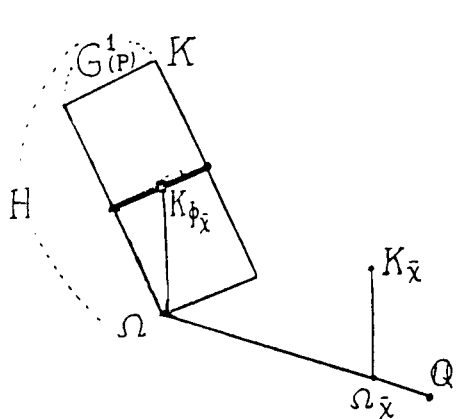
$K_{\bar{\chi}}$ est le corps fixe du caractère $\bar{\chi}$). On pose $m = [K_{\bar{\chi}} : \Omega_{\bar{\chi}}]$
 et $m = P^s \prod m_p$ pour p premier divisant m , avec $(m_p, P) = 1$.

On note $\phi_{\bar{\chi}}$ le caractère de ramification de K au dessus de $\bar{\chi}$.

Pour le calcul de $J_{\chi, \phi}$, on envisage différents cas.

1er cas : K est de type II, ou de type I avec $f^{(2)} = 4$.

Dans ce cas on a toujours $\Omega_{\phi} = \Omega$ et $H_{\phi} = H$ est cyclique (si K est de type I, il n'a que des caractères de 1ère espèce).



Soit σ un générateur de H , on peut prendre $s_{\phi} = \sigma$ et on a $\text{Ker } \phi = \langle \sigma^{h_{\phi}} \rangle$ ($h_{\phi} = [K_{\phi} : \Omega]$).
 Si $[K_{\bar{\chi}} : \Omega_{\bar{\chi}}] = m$, on a $\chi(\sigma) = \zeta_m$ (ζ_m racine primitive $m^{\text{ième}}$ de 1). On a alors :

$$J_1 = (\chi(\sigma)^{h_{\phi}} - 1) \subset J_2 = (P_{h_{\phi}}(\chi(\sigma)))$$

D'où $J_{\chi, \phi} = (P_{h_{\phi}}(\zeta_m))$

Le trait appuyé correspond aux positions de K_{ϕ} relatives aux caractères ϕ tels que $J_{\chi, \phi} \neq (1)$ et $J_{\chi, \phi} \subset (p)$.

Soit $\phi_{\bar{\chi}}$ le caractère de ramification de K au dessus de $\bar{\chi}$.

On a $[K_{\phi_{\bar{\chi}}} : \Omega] = m$. On déduit alors du lemme 2 que les caractères de

ramification de K correspondent à un idéal $J_{\chi, \phi} \neq (1)$ sont les suivants :

(a) ϕ tel que $K_{\phi} \subsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ et $[K_{\phi_{\bar{\chi}}} : K_{\phi}] = p^t$ avec p/m (t

varie dans $[1, s_p]$).

si $1 \leq t < s_p$, $J_{\chi, \phi} = (\zeta_{p^{t+1}} - 1)^{p-1} \cdot z_{\bar{\chi}}^{(g_{\bar{\chi}})}$

si $t = s_p$, $J_{\chi, \phi} = (\zeta_p^{s_p} - 1) \cdot Z^{\langle g_{\chi} \rangle}$

Le produit de ces idéaux est égal à $\prod_{p/m} (\zeta_p^{s_p} - 1)^{p^{s_p-1}} = \prod_{p/m} (\zeta_p - 1)$

(b) $\phi = \frac{\phi}{\chi}$: $J_{\chi, \frac{\phi}{\chi}} = (0)$

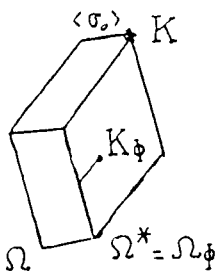
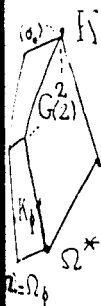
(c) ϕ tel que $K_{\phi} \supsetneq K_{\frac{\phi}{\chi}}$ et $[K_{\phi} : K_{\frac{\phi}{\chi}}] = p^t$ avec p sau-

vagement ramifié dans K ($t \geq 1$ et $t \leq r_p - s_p - \epsilon_p$ avec $\epsilon_p = 1$, sauf si $p = 2$

et K de type II, où $\epsilon_2 = 2$) alors $J_{\chi, \phi} = p \cdot Z^{\langle g_{\chi} \rangle}$.

Le produit de ces idéaux est égal à $[K : K_{\frac{\phi}{\chi}}]$.

2ième cas : K est de type I avec \mathcal{O}/F .



On pose $H^* = G^2(2) \cdot \prod_{p \neq 2} G'(p) = \langle \sigma \rangle$

on a $H = \langle \sigma_0 \rangle \cdot \langle \sigma \rangle$ avec $\sigma_0^2 = 1$.

On distingue 3 cas pour les caractères de ramification ϕ de K :

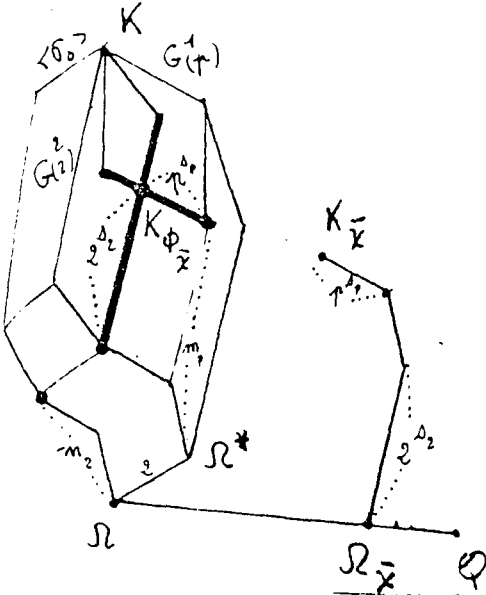
1ère espèce ϕ de 2ième espèce

(i) ϕ de 1ère espèce et $[K_{\phi} : \Omega] = h_{\phi}$ impair ($\Omega_{\phi} = \Omega$ et $H_{\phi} = H$), on a alors $\text{Ker } \phi = \langle \sigma_0 \rangle \langle \sigma^{h_{\phi}} \rangle$ on peut prendre $s_{\phi} = \sigma$.

(ii) ϕ de 1ère espèce et $[K_{\phi} : \Omega] = h_{\phi}$ pair ($\Omega_{\phi} = \Omega, H_{\phi} = H$) on pose $h_{\phi} = 2h'_{\phi}$ (h'_{ϕ} impair) on a $\text{Ker } \phi = \langle \sigma^{h'_{\phi}} \rangle$, $s_{\phi} = \sigma_0 \sigma$.

(iii) ϕ de 2ième espèce alors $\Omega_{\phi} = \Omega^*$ et $H_{\phi} = H^*$ est cyclique, on a $[K_{\phi} : \Omega^*] = h_{\phi}$ toujours pair, $\text{Ker } \phi = \langle \sigma^{h_{\phi}} \rangle$, $s_{\phi} = \sigma$; pour ϕ de 2ième espèce on quelque soit χ , $J_{\chi, \phi} = \left(P_{h_{\phi}}(\chi(\sigma)) \right)$.

Pour achever le calcul de $J_{\chi, \Phi}$ il faut distinguer plusieurs sous-cas selon le type de K_{χ} et la parité de f_{χ} . (voir diagrammes).



• Si $8/f_{\chi}$ (K_{χ} est de type II) on a $\chi(\sigma_0) = 1$ $\chi(\sigma) = \zeta_m$ avec $m = [K_{\chi} : \Omega_{\chi}]$ pair.

Le caractère $\Phi_{\bar{\chi}}$ de ramification de K au dessus de χ est de 2ième espèce et tel que

$$h_{\Phi_{\bar{\chi}}} = [K_{\Phi_{\bar{\chi}}} : \Omega^*] = m \quad ([K_{\Phi_{\bar{\chi}}} : \Omega] = 2m).$$

— Positions de K_{Φ} telles que $J_{\chi, \Phi} \neq (1)$ et $J_{\chi, \Phi}$ divise (p) ou (2).

(i) pour Φ de 1ère espèce avec h_{Φ} impair, on a

$$J_1 = (\zeta_m^{h_{\Phi}} - 1) \subset J_2 = (P_{h_{\Phi}}(\zeta_m))$$

donc $J_{\chi, \Phi} = (P_{h_{\Phi}}(\zeta_m))$. L'idéal $J_{\chi, \Phi}$ est différent de (1) pour

$$h_{\Phi} = [K_{\Phi} : \Omega] = m_2 \text{ avec } m_2 \text{ tel que } m = 2^{s_2} m_2 \quad (2 \nmid m_2).$$

On a alors $J_{\chi, \Phi} = (\zeta_2^{s_2} - 1)$ et $K_{\Phi} \subset K_{\Phi_{\bar{\chi}}}$ avec $[K_{\Phi_{\bar{\chi}}} : K_{\Phi}] = 2^{s_2+1}$

(ii) pour Φ de 1ère espèce avec h_{Φ} pair ($h_{\Phi} = 2h'$) on a

$$J_1 = (\zeta_m^{h'} - 1), \quad J_2 = (P_{2h'}(\zeta_m))$$

Donc $J_2 \supset (\zeta_m^{h'} + 1)$ et $J_1 + J_2 \supset (2)$. Pour avoir $J_{\chi, \Phi} \neq (1)$ il faut que

l'on ait $h_{\Phi} = 2m_2$ et alors $J_{\chi, \Phi} = J_1 = J_2 = (\zeta_2^{s_2} - 1)$ et $K_{\Phi} \subset K_{\Phi_{\bar{\chi}}}$ avec

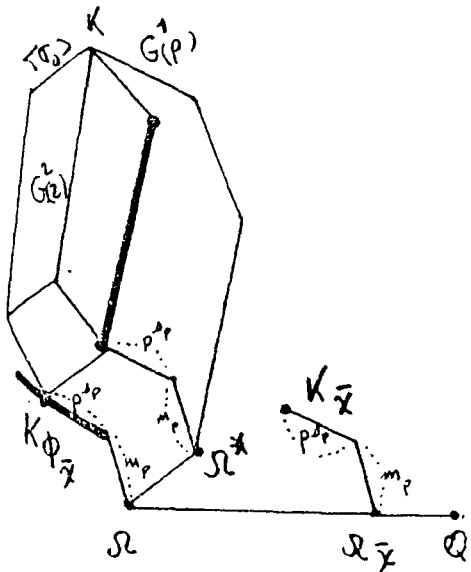
$$[K_{\Phi_{\bar{\chi}}} : K_{\Phi}] = 2^{s_2}.$$

(iii) pour Φ de 2ième espèce on a $J_{\chi, \Phi} = (P_{h_{\Phi}}(\zeta_m))$ avec

$h_{\phi} = [K_{\phi} : \Omega^*]$. Les caractères de 2ième espèce tels que $J_{\chi, \phi} \neq (1)$ sont les suivants :

- (a) ϕ tel que $K_{\phi} \subset K_{\phi \bar{\chi}}$ et $[K_{\phi \bar{\chi}} : K_{\phi}] = p^t$ avec p/m et t variant dans $[1, s_p - \delta_p]$ ($\delta_p = 0$ si p impair, $\delta_2 = 1$)
 si $1 \leq t < s_p$, $J_{\chi, \phi} = (\zeta_{p^{t+1}} - 1)^{p-1}$
 si $t = s_p$, $J_{\chi, \phi} = (\zeta_{p^{s_p}} - 1)$
- (b) $\phi = \phi \bar{\chi} : J_{\chi, \phi \bar{\chi}} = (0)$
- (c) ϕ tel que $K_{\phi} \supset K_{\phi \bar{\chi}}$ et $[K_{\phi} : K_{\phi \bar{\chi}}] = p^t$ avec p sauvagement ramifié dans K et t variant dans $[1, r_p - s_p - \epsilon_p]$ ($\epsilon_p = 1$ si p impair et $\epsilon_2 = 2$). Alors $J_{\chi, \phi} = (p)$.

Le produit des idéaux $J_{\chi, \phi}$ (ϕ de 1^{ère} ou 2^{ème} espèce) tels que $K_{\phi} \subset K_{\phi \bar{\chi}}$ est égal à $(\zeta_{2^{s_2}} - 1) \cdot \prod_{p^2/f_{\chi}} (\zeta - 1)$. Le produit des idéaux $J_{\chi, \phi}$ tels que $K_{\phi} \supset K_{\phi \bar{\chi}}$ est égal à $[K : K_{\phi \bar{\chi}}]$.



• Si $2 \nmid f_{\chi}$ (K_{χ} est de type 1) on a $\chi(\sigma_0) = 1$, $\chi(\sigma) = \zeta_m$ avec $m = [K_{\chi} : \Omega_{\chi}]$ impair.

Le caractère de ramification $\phi \bar{\chi}$ de K au dessus de χ est de 1^{ère} espèce avec $[K_{\phi \bar{\chi}} : \Omega] = h_{\phi \bar{\chi}} = m$.

— Positions de K_{ϕ} tel que $J_{\chi, \phi} \neq 1$ et $J_{\chi, \phi}$ divise (p) ou (2) .

(i) pour ϕ de 1ère espèce avec h_ϕ impair, on a :

$$J_1 \subset J_2 = J_{\chi, \phi} = (P_{h_\phi}(\zeta_m))$$

Les caractères de 1ère espèce avec h_ϕ impair tels que $J_{\chi, \phi} \neq (1)$ sont les suivants :

(a) ϕ tel que $K_\phi \subsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ et $[K_{\phi_{\bar{\chi}}} : K_\phi] = p^t$ avec p/m et t variant dans $[1 \ s_p]$ (p nécessairement impair)

$$1 \leq t < s_p : J_{\chi, \phi} = (\zeta_{p^{t+1}} - 1)^{p-1}$$

$$t = s_p : J_{\chi, \phi} = (\zeta_{p^{s_p}} - 1)$$

(b) $\phi = \phi_{\bar{\chi}}$, $J_{\chi, \phi_{\bar{\chi}}} = (0)$

(c) ϕ tel que $K_\phi \supsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ et $[K_\phi : K_{\phi_{\bar{\chi}}}] = p^t$ avec p impair sauvagement ramifié dans K et $t \in [1 \ r_p - s_p - 1]$ alors $J_{\chi, \phi} = (p)$.

(ii) pour ϕ de 1ère espèce, h_ϕ pair ($h_\phi = 2h'_\phi$) on a :

$$J_1 = (\zeta_m^{h'_\phi} - 1) \text{ et } J_2 = (P_{2h'_\phi}(\zeta_m))$$

d'où $J_{\chi, \phi} \supset (2)$. Pour avoir $J_{\chi, \phi} \neq (1)$ il faut $h_\phi = 2m$ (alors $K_\phi \supsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ avec $[K_\phi : K_{\phi_{\bar{\chi}}}] = 2$) et $J_{\chi, \phi} = (2)$.

(iii) pour ϕ de 2ième espèce, on a :

$$J_{\chi, \phi} = (P_{h_\phi}(\zeta_m)) \text{ avec } h_\phi \text{ pair.}$$

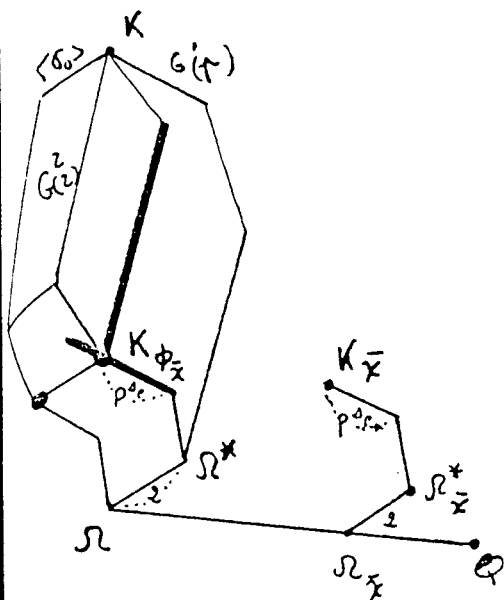
Les caractères de 2ième espèce tels que $J_{\chi, \phi} \neq (1)$ sont tels que $h_\phi = 2^t m$ ou $K_\phi \supsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ avec $[K_\phi : K_{\phi_{\bar{\chi}}}] = 2^{t+1}$ et $t \in [1 \ r_2 - 2]$ on a alors $J_{\chi, \phi} = (2)$.

Le produit des idéaux $J_{\chi, \phi}$ tels que $K_\phi \subsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ (ϕ nécessairement de 1ère

espèce avec h_ϕ impair) est $\prod_{p/m} (\zeta_p - 1)$. Le produit des idéaux $J_{\chi, \phi}$

tels que $K_{\phi} \supsetneq K_{\phi \bar{\chi}}$ (ϕ de 1ère ou de 2ième espèce) est encore égal à

$$[K : K_{\phi \bar{\chi}}].$$



• Si $F_{\chi}^{(2)} = 4$, on a :

$$\chi(\sigma_0) = -1, \chi(\sigma) = m_2 \text{ avec } m_2 \text{ impair tel}$$

$$\text{que } [K_{\chi} : \Omega_{\chi}] = 2m_2 = m.$$

Le caractère de ramification $\phi \bar{\chi}$ de K au dessus de χ est de 1ère espèce avec $[K_{\phi \bar{\chi}} : \Omega] = 2m_2 = m.$

— Positions de K_{ϕ} telles que $J_{\chi, \phi} \neq 1$ et divise (p) ou (2) .

(i) pour ϕ de 1ère espèce et h_{ϕ} impair, on a :

$$J_1 = (\chi(\sigma)^{h_{\phi}} - 1, \chi(\sigma_0) - 1)$$

$$\text{soit } J_1 = (\zeta_{m_2}^{h_{\phi}} - 1, 2) \text{ et } J_2 = (P_{h_{\phi}}(\zeta_{m_2})) \supset (\zeta_{m_2}^{h_{\phi}} - 1)$$

h_{ϕ} et m_2 étant impairs, le seul cas où $J_{\chi, \phi} \neq 1$ différent de (1) est $h_{\phi} = m_2$ et alors $J_{\chi, \phi} = J_1 = (2)$ ($\neq J_2$ qui est nul), on a dans ce cas

$$K_{\phi} \subsetneq K_{\phi \bar{\chi}} \text{ (avec } [K_{\phi \bar{\chi}} : K_{\phi}] = 2 \text{)}.$$

(ii) pour ϕ de 1ère espèce avec $h_{\phi} = 2h'_{\phi}$ on a :

$$J_1 = (\zeta_m^{h'_{\phi}} - 1) \quad J_2 = (P_{2h'_{\phi}}(-\zeta_{m_2})) = (P_{2h'_{\phi}}(\zeta_{2m_2})) \supset (\zeta_{m_2}^{h'_{\phi}} - 1)$$

donc $J_{\chi, \phi} = (P_{h_{\phi}}(\zeta_m))$. Les caractères de 1ère espèce avec h_{ϕ} pair tel que

$J_{\chi, \phi} \neq (1)$ sont les suivants :

(a) ϕ tel que $K_{\phi} \subsetneq K_{\phi \bar{\chi}}$ et $[K_{\phi \bar{\chi}} : K_{\phi}] = p^t$ avec p/m_2

et $t \in [1, P_p]$

si $1 \leq t < s_p$, $J_{\chi, \phi} = (\zeta_p^{t+1} - 1)^{p-1}$

$t = s_p$, $J_{\chi, \phi} = (\zeta_p^{s_p} - 1)$

(b) $\phi = \phi_{\bar{\chi}}$ $J_{\chi, \phi_{\bar{\chi}}} = (0)$

(c) ϕ tel que $K_{\phi} \supsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ et $[K_{\phi} : K_{\phi_{\bar{\chi}}}] = p^t$ avec p impair sauvagement ramifié dans K et $t \in [1, r_p - 1 - s_p]$ alors $J_{\chi, \phi} = (p)$.

(iii) pour ϕ de 2ième espèce , on a $J_{\chi, \phi} = (P_{h_{\phi}}(\zeta_{m_2}))$ avec h_{ϕ} pair et m_2 impair. Les caractères de 2ième espèce tels que $J_{\chi, \phi} \neq (1)$ sont tels que $h_{\phi} = 2^t m_2$ avec $t \in [1, r_2 - 2]$ d'où $K_{\phi} \supsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ avec $[K_{\phi} : K_{\phi_{\bar{\chi}}}] = 2^t$ et $J_{\chi, \phi} = (2)$.

Le produit des idéaux $J_{\chi, \phi}$ tels que $K_{\phi} \subsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ (ϕ est de 1ère espèce) est $\prod_{p/m} (\zeta_p - 1)$ et le produit des idéaux $J_{\chi, \phi}$ tels que $K_{\phi} \supsetneq K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ (ϕ de 1^o ou 2^o espèce) est $[K : K_{\phi_{\bar{\chi}}}]$.

On peut maintenant énoncer :

Proposition.

(i) L'image de $O_{\bar{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}} [G] \circlearrowleft O_K$ dans le groupe de Grothendieck des $\mathbb{Z} \binom{g}{\bar{\chi}}$ modules de type fini, est l'élément neutre.

(ii) Soit $\phi_{\bar{\chi}}$ le caractère de ramification de K au dessus de $\bar{\chi}$, soit $K_{\phi_{\bar{\chi}}}$ le corps fixe de $\text{Ker } \phi_{\bar{\chi}}$; on peut écrire :

$$O_{\bar{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}} [G] \circlearrowleft O_K = O_{\bar{\chi}} \cdot O_K \oplus \mathcal{Z}_{\bar{\chi}} \oplus \mathcal{Z}_{K/K_{\phi_{\bar{\chi}}}}$$
 , avec :

$$(a) \tau_{\bar{\chi}} = \bigoplus_{\substack{\phi \text{ tel que} \\ \text{Ker } \phi \supset \text{Ker } \phi_{\bar{\chi}} \\ \neq}} \mathcal{O}_{\bar{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \cdot T_{K, \phi}$$

Le $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ -module $\tau_{\bar{\chi}}$ peut s'interpréter comme la torsion de

$\mathcal{O}_{\bar{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}} [\text{gal}(K_{\phi_{\bar{\chi}}}/\mathbb{Q})] \mathcal{O}_{K_{\phi_{\bar{\chi}}}}$ (où $\mathcal{O}_{K_{\phi_{\bar{\chi}}}}$ est l'anneau des entiers de $K_{\phi_{\bar{\chi}}}$).

$$(b) \tau_{K/K_{\phi_{\bar{\chi}}}} = \bigoplus_{\substack{\phi \text{ tel que} \\ \text{Ker } \phi \subset \text{Ker } \phi_{\bar{\chi}} \\ \neq}} \mathcal{O}_{\bar{\chi}} \otimes \mathbb{Z}[G] \cdot T_{K, \phi}$$

L'idéal de $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ canoniquement associé (par les suites de Jordan Holder)

au module de torsion $\tau_{K/K_{\phi_{\bar{\chi}}}}$ est :

$$I_{K/K_{\phi_{\bar{\chi}}}} = [K : K_{\phi_{\bar{\chi}}}] \mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$$

$$(c) \mathcal{O}_{\bar{\chi}} \cdot \mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{\bar{\chi}} \cdot T_{K, \phi_{\bar{\chi}}}$$

Si χ est l'un des caractères complexes de G au dessous de $\bar{\chi}$, 1_{χ} , l'idempotent de $\mathbb{C}[G]$ et $\zeta(\chi)$ la somme de Gauss primitive normée associés,

l'application $\mathcal{O} \rightarrow \frac{|G| \cdot 1_{\chi} \cdot \mathcal{O}}{\zeta(\chi)}$ est un $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ homomorphisme injectif de

$\mathcal{O}_{\bar{\chi}} \cdot \mathcal{O}_K$ dans $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ dont l'image est l'idéal $[K : K_{\phi_{\bar{\chi}}}] \cdot \mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$.

Démonstration.

Les points a et b résultent de la discussion qui précède

$$(c) \text{ Pour } \mathcal{O} \in K, \text{ les éléments } y_K(\chi / \mathcal{O}) = \frac{|G| 1_{\chi} \mathcal{O}}{\zeta(\chi)}$$

sont les χ -coordonnées définies par Léopoldt ($[L]$). Les résultats énoncés dans la partie 2.c de la proposition sont une conséquence immédiate des propriétés des χ -coordonnées (et on a $y_K(\chi, T_{K, \phi_{\bar{\chi}}}) = [K : K_{\phi_{\bar{\chi}}}] \cdot \epsilon$,

avec ϵ unité de $Z^{(g_{\bar{x}})}$.

Le fait que les images canoniques dans $Z^{(g_{\bar{x}})}$ de $O_{\bar{x}} \cdot O_K$ et de la partie $\mathcal{Z}_{K/K_{\bar{x}}}$ de la torsion de $O_{\bar{x}} \otimes_Z [G] O_K$ se correspondent est

à rapprocher du résultat analogue concernant les extensions non abéliennes de degré $p \cdot q$, pour le caractère \bar{x} correspondant au facteur simple $\mathfrak{O}^{(q)}$ de $\mathfrak{O}[G]$ (voir [C-1]).

Remarques.

Le fait que $O_{\bar{x}} \otimes_Z [\text{gal } K_{\bar{x}} / \mathfrak{O}] O_{K_{\bar{x}}}$ soit facteur direct de $O_{\bar{x}} \otimes_Z [G] O_K$ apparait ici comme une conséquence du calcul des idéaux $J_{\bar{x}, \bar{\phi}}$ mais peut se démontrer directement.

- L'extension $K_{\bar{x}} / K_{\bar{x}}$ est telle que $(K_{\bar{x}} / K_{\bar{x}})$ soit la sous extension modérée maximale de $K / K_{\bar{x}}$, sauf dans le cas où K est de type I avec $8 / f_{\bar{x}}$, auquel cas $K_{\bar{x}} / K_{\bar{x}}$ est non modérée en 2. Dans le premier cas

l'idéal $J_{\bar{x}}$ associé au module de torsion $\mathcal{Z}_{\bar{x}}$ est $L_{\bar{x}} = \prod_{p^2 / f_{\bar{x}}} (\zeta_p - 1)$. Dans

le deuxième cas, on a $L_{\bar{x}} = (\zeta_{2^{s_2}} - 1) \cdot \prod_{p^2 / f_{\bar{x}}} (\zeta_p - 1)$ (avec s_2 tel que

$$f_{\bar{x}}^{(2)} = 2^{s_2+2}, \quad s_2 \geq 1).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [C-1] Cougnard J. Séminaire de Besançon (octobre 76).
- [C-2] Cougnard J. Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers des p -extensions. Composition mathematika. Vol 33, fasc. 3 (1976), p. 303-336.
- [F] Fröhlich A. Arithmetic and Galois module structure for tame extensions. J. de Crelle. Vol 286/287 , (1976) , p. 380-440.
- [J] Jacobinski H. Über die Hauptordnung eines Körpers als Gruppenmodul. J. reine angew. Math. 213 (1963) , p. 151-149.
- [L] Léopoldt H.W Über die Hauptordnung des ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers. J. de Crelle 201 (1959) , p. 119-149.
- [M] Martinet J. Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe de Galois diédral d'ordre $2p$. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19 (1969) , p. 1-80.
-