INTRODUCTION À LA CONJECTURE PRINCIPALE DE LA THÉORIE D'IWASAWA NON COMMUTATIVE DES CORPS TOTALEMENT RÉELS

par

Thong Nguyen Quang Do

Résumé. — Cet article constitue une version élaborée et étendue d'un mini-cours donné par l'auteur sur le sujet mentionné dans le titre aux Journées Arithmétiques de Meknès 2010. Avec les deux autres mini-cours de W. Bley et C. Greither (voir [**Ble12**] et [**Gre12**] dans ce volume), l'idée générale était de fournir à des non-experts un aperçu des derniers développements autour de l'un des thèmes les plus fascinants de la théorie des nombres, à savoir les propriétés arithmétiques attachées aux valeurs spéciales des fonctions L complexes. Nous énoncerons la Conjecture Principale du titre et nous donnerons un aperçu de sa démonstration suivant [**Kak10**] (voir aussi [**RW11**]).

Abstract. — This article consists in an extended and elaborate version of a mini-course taught by the author on the subject of the title at the « Journées Arithmétiques » of Meknès 2010. Together with the two other mini-courses by W. Bley and C. Greither, the general idea was to give to non-experts an overview of the latest developments around one of the most fascinating themes of number theory, namely the arithmetic properties attached to special values of complex L-functions. We shall state the Main Conjecture of the title and give a sketch of its proof according to Kakde [**Kak10**] (see also Ritter-Weiss [**RW11**]).

Introduction

Cet article constitue une version élaborée et étendue d'un mini-cours donné par l'auteur sur le sujet mentionné dans le titre aux Journées Arithmétiques de Meknès 2010. Avec les deux autres mini-cours de W. Bley et C. Greither (voir [**Ble12**] et [**Gre12**] dans ce volume), l'idée générale était de fournir à des non-experts un aperçu des derniers développements autour de l'un des thèmes les plus fascinants de la théorie des nombres, à savoir les propriétés arithmétiques attachées aux valeurs spéciales des fonctions L complexes. Quelques exemples archétypiques : les congruences de Kummer, la formule analytique du nombre de classes, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer ... Tout un corpus de résultats, et surtout de conjectures, aussi mystérieux les uns que les autres (« mystiques », dirait K. Kato) se trouve maintenant englobé dans la

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11R23.
Mots clefs. — p-adic Lie extensions, localization sequence of K-theory, perfect complexes, p-adic zeta, non abelian pseudo-measure.

conjecture équivariante des nombres de Tamagawa (ETNC) qui fait l'objet des deux autres mini-cours. S'il fallait résumer en une seule phrase la nature de cette ETNC, on pourrait dire qu'il s'agit d'un principe logal-global hypersophistiqué qui fait se rencontrer les mondes archimédien et p-adique autour de la valeur spéciale $L^*(M,0)$, où $L(M,s)$ est la fonction L complexe (et largement conjecturale) attachée à un motif et $L^*(M,0)$ le premier terme non nul de son développement de Taylor au voisinage de zéro. Comme il n'est pas question de traiter des motifs en général dans un mini-cours, le lecteur pourra se focaliser sur deux exemples emblématiques, le motif de Tate et le motif associé à une courbe elliptique. On ne les définira même pas, sauf pour dire que les fonctions L attachées au premier sont les fonctions L d'Artin, et au second, la fonction L de Hasse-Weil de la courbe elliptique.
La théorie d'Iwasawa constitue à l'heure actuelle la seule méthode générale pour attaquer le problème des valeurs spéciales, selon le schéma suivant :

$$
\begin{tikzcd}
L_p(M,s) \arrow[r, dotted, leftrightarrow, "\text{CP}"] \arrow[d, dotted, leftrightarrow, "\text{interpolation } p\text{-adique}"'] & \begin{array}{c}\text{arithmétique de } M\\ \text{au niveau infini}\\ \text{(modules, complexes}\\ \text{d'Iwasawa)}\end{array} \arrow[d, dotted, "\text{descente d'Iwasawa}"] \\
L(M,s) \arrow[r, dotted, leftrightarrow, "\text{ETNC ou autres conjectures}"] & \begin{array}{c}\text{arithmétique de } M\\ \text{au niveau fini}\\ \text{(groupes de Selmer,}\\ \text{de Tate-Shafarevich ...)}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

Explication : l'interpolation p-adique des valeurs spéciales permet de construire des fonctions L_p qui sont plus directement liées aux propriétés arithmétiques des motifs que leurs analogues complexes. Ces liens se lisent « au niveau infini » via des Conjectures Principales (CP) qui sont des relations précises entre des objets analytiques (les fonctions L_p) et des objets arithmétiques (modules ou complexes d'Iwasawa). Par descente jusqu'au « niveau fini », on obtient des renseignements, parfois complets, sur l'arithmétique des valeurs spéciales. Il reste à expliquer les mots entre guillemets. Le processus principal de la théorie d'Iwasawa est la montée-descente le long d'une extension infinie F_∞/F de corps de nombres, construite naturellement à partir du motif M pour trivialiser certaines actions galoisiennes. Dans les cas classiques, au motif M est attaché un certain groupe algébrique dont les points de p^n-torsion (n variable) engendrent F_∞. Par exemple, le groupe algébrique pour le motif de Tate est $\mathbb{G}_m$, $F_\infty = F(\mu_{p^n})$ et le module d'Iwasawa usuel est la limite projective le long de la tour des p-groupes de classes. Pour le motif issu d'une courbe elliptique E, le groupe algébrique est E elle-même, $F_\infty = F(E[p^\infty])$ et le module d'Iwasawa est le dual de la limite inductive des p-groupes de Selmer.

Dans les premiers temps de la théorie, les motifs étudiés (motif de Tate sur un corps totalement réel F, courbe elliptique à multiplication complexe sur un corps quadratique imaginaire K avec bonne réduction ordinaire en p) donnaient des tours F_∞ telles que $\mathrm{Gal}(F_\infty/F(\mu_p)) \simeq \mathbb{Z}_p$, $\mathrm{Gal}(K_\infty/K(E[p])) \simeq \mathbb{Z}_p^2$. Pour des groupes G de la forme $\mathbb{Z}_p^d$, on dispose d'un théorème de structure pour les modules noetheriens de torsion sur l'algèbre complète $\mathbb{Z}_p[[G]]$, qui permet d'associer aux modules d'Iwasawa standard des « séries caractéristiques », que les CP relient alors de façon précise aux fonctions L_p. Mais cette *théorie d'Iwasawa commutative* laisse échapper des cas importants, à commencer par les courbes elliptiques E sans multiplication complexe, pour lesquelles on sait que $\mathrm{Gal}(F(E[p^\infty])/F)$ est un sous-groupe ouvert de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ (un résultat de Serre). La recherche d'une *théorie d'Iwasawa non commutative* devient donc nécessaire, avec d'emblée trois problèmes à résoudre :

– définir un « élément caractéristique » malgré l'absence d'un théorème de structure
– définir un « élément zêta p-adique » qui non seulement réalise l'interpolation p-adique des valeurs spéciales, mais jouit d'équivariance par rapport à un groupe d'automorphismes du corps de base
– relier fonctoriellement ces deux éléments

Un cadre général a été proposé par [**CFK+05**] pour les courbes elliptiques sans MC, puis étendu aux motifs par [**FK06**]. Au terme de nombreux efforts, le cas du motif de Tate sur un corps totalement réel vient d'être résolu indépendamment par Ritter-Weiss ([**RW11**]) et par M. Kakde ([**Kak10**]). C'est ce que nous nous proposons d'exposer ici, en nous appuyant largement sur la prépublication [**Kak10**]. Notons que celle-ci a été révisée et corrigée dans une version de 2011, qui a fait l'objet d'un atelier d'étude à l'université de Münster (avril 2011). La descente ne sera pas traitée, seulement la CP non commutative. Comme il s'agit d'une introduction, on se souciera moins des détails techniques – d'autant moins qu'ils relèvent assez souvent de la théorie des groupes plutôt que de la théorie des nombres– que de la ligne générale du raisonnement. Les préliminaires de la théorie d'Iwasawa classique, tels qu'ils sont exposés par exemple dans le livre [**Was97**], suffiront largement au débutant. Tous les raffinements ultérieurs seront plus ou moins expliqués dans le texte – un texte qui ne prétend à aucune originalité, visant seulement un but pédagogique.

1. Rappels sur la Conjecture Principale commutative (ou classique)

Comme on l'a dit dans l'introduction, la Conjecture Principale classique (CPC) fait le lien entre certains objets galoisiens (ici, certains modules d'Iwasawa) et certains objets analytiques (ici, les fonctions L p-adiques).

1.1. Notations générales. —

– $p =$ un nombre premier, supposé *impair* par commodité
– $F =$ un corps de nombres totalement réel
– $F_{cyc} =$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F
– $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_{cyc}/F) \simeq (\mathbb{Z}_p, +)$, γ un générateur topologique de Γ

– κ_F = le caractère cyclotomique de $\overline{F}/F$, $u = \kappa_F(\gamma)$.
Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Pour tout groupe profini G, soit $\Lambda_{\mathcal{O}}(G)$ l'algèbre d'Iwasawa $\varprojlim \mathcal{O}[G/U]$, U parcourant les sous-groupes ouverts de G. On écrira simplement $\Lambda(G)$ si $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$. En particulier l'application $\gamma \mapsto 1+T$ induit un isomorphisme de $\Lambda_{\mathcal{O}}(\Gamma)$ sur l'algèbre des séries formelles $\mathcal{O}[[T]]$.

1.2. Le contexte galoisien. — Soit F_∞/F une extension galoisienne telle que :
(i) F_∞ est un corps totalement réel, contenant F_{cyc}
(ii) F_∞/F est non ramifiée en dehors d'un ensemble fixé Σ de places de F. On supposera (sauf mention expresse du contraire) que Σ contient l'ensemble $\mathrm{Ram}(F_\infty/F)$ des places ramifiées de F_∞/F (et donc, puisque F_∞ contient F_{cyc}, Σ contient toutes les p-places de F) ainsi que les places archimédiennes.
(iii) $G := \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est abélien (ce qui explique la terminologie « commutative ») et $H := \mathrm{Gal}(F_\infty/F_{cyc})$ est fini. En fixant un relèvement de Γ à G, on pourra identifier G à $H \times \Gamma$, et $\Lambda_{\mathcal{O}}(G)$ à $\mathcal{O}[H][[T]]$.
Soit M_∞ la pro-p-extension abélienne maximale de F_∞ qui est Σ-ramifiée, i.e. non ramifiée hors de Σ. Alors G opère sur $X := \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)$ par automorphismes intérieurs, et le $\Lambda(G)$-module X est l'objet arithmétique principal qui intervient dans la CPC.
NB : Dans les premiers temps de la théorie d'Iwasawa, l'attention se concentrait plutôt sur $\mathfrak{X} = \mathrm{Gal}(L_\infty/F_\infty(\mu_p))^-$ (où μ_p désigne le groupe des racines p-ièmes de l'unité, L_∞ la pro-p-extension abélienne non ramifiée maximale de $F_\infty(\mu_p)$, et $(\cdot)^-$ la « partie moins » sous l'action de la conjugaison complexe), à cause évidemment du rôle central du groupe de classes en théorie algébrique des nombres. Les modules X et $\mathfrak{X}$ sont reliés par le « miroir » (Spiegelung), mais la refocalisation sur X au lieu de $\mathfrak{X}$ s'explique à la fois par ses meilleures propriétés fonctorielles et sa meilleure adaptabilité à un cadre « K-théorique » (voir le §2.3 ci-dessous).

1.3. Le contexte analytique p-adique. — (Dans cette sous-section, on suppose seulement que Σ contient $p\ \infty$).
Il s'agit d'interpoler p-adiquement les valeurs aux entiers négatifs des fonctions L complexes. Plus précisément, notons $\widehat{G}$ le groupe des caractères abéliens p-adiques (i.e. à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$) d'ordre fini de G. Pour tout $\psi \in \widehat{G}$, on cherche une fonction continue $L_p(s,\psi)$ de $s \in \mathbb{Z}_p$ ($s \neq 1$ si ψ est le caractère trivial $\mathbf{1}$) à valeurs dans $\mathbb{C}_p$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 0 \bmod (p-1), L_p(1-n,\psi) = L(1-n,\psi) \prod_{\wp | p} \left(1 - \frac{\psi(\wp)}{N(\wp)^{1-n}}\right),$$

où $L(s,\psi)$ est la fonction L complexe attachée à ψ (au sens du §2.4 ci-après).
[on a omis la référence au corps de base F dans les notations].
De façon équivalente on peut chercher une fonction p-adique $L_\Sigma(s,\psi)$ vérifiant

$$L_\Sigma(1-n,\psi) = L_p(1-n,\psi) \prod_{\wp \in \Sigma, \wp \nmid p\infty} \left(1 - \frac{\psi(\wp)}{N(\wp)}^{1-n}\right).$$

Le théorème d'existence dû (indépendamment et par des méthodes différentes) à Barsky, P. Cassou-Noguès et Deligne-Ribet peut s'énoncer ainsi :

Théorème 1.1. — *Pour tout $\psi \in \widehat{G}$, posons $H_\psi = \psi(\gamma)(1+T) - 1$ si $\psi_{|H} = \mathbf{1}$ (type W), et $H_\psi(T) = 1$ si $\psi_{|H} \neq \mathbf{1}$ (type S). Il existe une série $G_{\psi,\Sigma}(T) \in \mathbb{Z}_p[\psi][[T]]$ telle que*

$$L_{\Sigma,p}(1-s,\psi) = \frac{G_{\psi,\Sigma}(u^s-1)}{H_\psi(u^s-1)} (\textit{le quotient est indépendant du choix de } \gamma).$$

Dans toute la suite, on privilégiera l'approche de [**DR80**] pour au moins deux raisons :

– Deligne et Ribet construisent la série $G_{\psi,\Sigma}(T)$ à partir de formes modulaires p-adiques de Hilbert, et ce sont des relations entre les termes constants des q-développements de ces formes qui fournissent des congruences décisives dans la théorie non commutative (voir §3.6).

– Dans l'interprétation donnée par Serre [**Ser78**], les résultats de [**DR80**] montrent en fait l'existence d'un « élément zêta p-adique » global (par opposition à « caractère par caractère »). Plus précisément, soit $Q\Lambda(G)$ l'anneau total des fractions de $\Lambda(G)$; un élément $f \in Q\Lambda(G)$ est appelé *pseudo-mesure* de G si $(g-1)f \in \Lambda(G)$ pour tout $g \in G$. D'après [**DR80**] :

  Théorème 1.2. — *Il existe alors une unique pseudo-mesure $\zeta_\Sigma = \zeta_\Sigma(F_\infty/F) \in Q\Lambda(G)$ telle que pour tout $\psi \in \widehat{G}$, $\widetilde{\psi}(\zeta_\Sigma) = \dfrac{G_{\psi,\Sigma}(T)}{H_\psi(T)}$.*

  Ici, $\widetilde{\psi}$ désigne l'homomorphisme naturel $\Lambda(G) \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{Z}_p[\psi]}(\Gamma) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}_p[\psi][[T]]$ déduit de $\sigma \in G \mapsto \psi(\sigma)\sigma(\text{mod } H)$, puis étendu à $Q\Lambda(G) \longrightarrow Q\mathbb{Z}_p[\psi][[T]]$. La formule du théorème peut aussi s'interpréter en termes d'intégration p-adique. Pour tout entier positif $n \equiv 0(\text{mod} p-1)$, $\psi\kappa_F^n$ est un homomorphisme continu de Γ dans $\mathbb{Z}_p^\times$, qu'on peut intégrer par rapport à toute mesure $f \in \Lambda_{\mathbb{Z}_p[\psi]}(\Gamma)$: $f(\psi\kappa_F^n)$ (ou $\langle\psi\kappa_F^n, f\rangle$):$= \varphi(f)(\kappa_F^n(\gamma)-1)$. Si $\xi \in Q\Lambda(G)$ est une pseudo-mesure, on peut définir suivant [**Ser78**], 1.12 une intégrale $\xi(\psi\kappa_F^n)$ (ou $\langle\psi\kappa_F^n, \xi\rangle$), et $L_{\Sigma,p}(1-n,\psi)$ n'est autre que $\xi(\psi\kappa_F^n)$ (la notation « évaluation en un caractère » sera expliquée au §2.4.1) C'est l'élément zêta p-adique ζ_Σ qu'il faudra généraliser dans la théorie non commutative (voir §2.4).

1.4. CPC et théorème de Wiles. — Soit $\psi \in \widehat{H}$. Dans cette section, on écrira pour simplifier Λ et Λ_ψ au lieu de $\Lambda(\Gamma)$ et $\Lambda_{\mathbb{Z}_p[\psi]}(\Gamma)$. Le Λ_ψ-module $X \otimes_{\Lambda(G)} \Lambda_\psi$ est noetherien et de Λ_ψ-torsion (c'est la « conjecture faible » de Leopoldt, qui est un théorème d'Iwasawa). Soit $h_\psi(T) \in \Lambda_\psi$ sa série caractéristique. Dans [**RW02a**],§5.2, Ritter-Weiss ont montré que $h_\psi(T)$ et $G_{\psi,\Sigma}(T)$ ont même invariant μ. Compte-tenu de ce renseignement complémentaire, la CPC (ou théorème de Wiles, [**Wil90**], Theorem 1.3) s'énonce ainsi :

Théorème 1.3. — *$\forall\psi \in \widehat{H}$, les séries $h_\psi(T)$ et $G_{\psi,\Sigma}(T)$ engendrent le même idéal dans Λ_ψ.*

Cet énoncé « caractère par caractère » n'est pas entièrement satisfaisant, puisqu'on sait que les séries $G_{\psi,\Sigma}(T)$ proviennent d'un élément $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ p-adique global. Mais (sauf dans le cas« semi-simple » où p ne divise pas l'ordre de H), et en l'absence d'un théorème de structure, nous ne savons pas par quel invariant remplacer la série caractéristique. De fait, l'énoncé d'une Conjecture Principale équivariante (CPE) va nécessiter ce qu'on pourrait appeler un« changement de paradigme » : remplacer les modules par des complexes.

2. Énoncé de la Conjecture Principale non commutative (ou équivariante)

On se propose d'étendre la CPC avec un double objectif :

– traiter le cas où G n'est pas forcément abélien, tout en gardant une signification arithmétique (voir l'introduction). On parle alors de Conjecture Principale non commutative, ou CPNC, selon la terminologie de [**FK06**], [**CFK$^+$05**], etc ...

– tenir compte de l'action galoisienne de G, et non seulement de Γ. On parle alors pour cette raison de Conjecture Principale équivariante, ou CPE, selon la terminologie de [**RW04**].

Les deux objectifs sont liés, mais la CPNC devant inclure la CPC, on préférera utiliser dans la suite, ne serait-ce que pour des raisons sémantiques, l'appellation (CPE). Pour énoncer une telle conjecture, il va falloir :

– trouver un substitut au module X et sa série caractéristique

– construire une généralisation de l'élément ζ_Σ p-adique (ou pseudo-mesure) de Deligne-Ribet

– relier fonctoriellement les deux objets arithmétique et analytique

Rappelons que, comme annoncé dans l'introduction, nous considérons ici seulement le motif de Tate, en d'autres termes nous cherchons une généralisation directe du théorème de Wiles.

2.1. Le contexte galoisien. — Comme dans le §1, F désigne un corps de nombres totalement réel, p un nombre premier impair.

Définition 2.1. — Une extension galoisienne F_∞/F est dite *admissible* si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. F_∞ est un corps totalement réel contenant F_{cyc}. On notera systématiquement $H = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_{cyc})$.
2. F_∞/F est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini Σ de places de F.
3. $G := \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est un groupe de Lie p-adique compact.

Rappelons quelques résultats importants de M. Lazard (voir e.g. [**Ser95**]) :

1. Tout groupe de Lie p-adique admet un sous-groupe ouvert compact qui est *p-saturé*, de rang fini.
2. Tout pro-p-groupe *p-valué* de rang fini est un groupe de Lie p-adique compact sans torsion.
3. Tout groupe p-valué complet est un groupe de Lie p-adique.

4. Un groupe topologique est un groupe de Lie p-adique si, et seulement si, il contient un sous-groupe ouvert qui est un pro-p-groupe *puissant*.
5. La catégorie des groupes de Lie p-adiques est stable par extension.

(pour les définitions manquantes, voir e.g. [**Ser95**]).

Exemples d'extensions admissibles :

1. Un groupe de Lie p-adique abélien compact G étant de la forme $H \times \mathbb{Z}_p^d$, H fini, la conjecture de Leopoldt pour F entraîne que G est le groupe de Galois d'une extension admissible abélienne F_∞/F si et seulement si $d = 1$, i.e. G est un groupe de Lie p-adique abélien de dimension 1.
2. Si K est un extension galoisienne finie totalement réelle de F, l'extension K_{cyc}/F est admissible et son groupe de Galois est un groupe de Lie p-adique de dimension 1.
3. Prenons $F_\infty = M_\Sigma =$ la pro-p-extension abélienne Σ-ramifiée maximale de F_{cyc}. Il est connu par la théorie d'Iwasawa classique que $H = \mathrm{Gal}(M_\Sigma/F_{cyc})$ n'a pas de sous-$\Lambda(\Gamma)$-module fini non nul, ce qui est équivalent à dire que la dimension projective de H sur $\Lambda(\Gamma)$ est au plus égale à 1. Si l'on suppose en outre que l'invariant μ de X est nul, alors $H \simeq \mathbb{Z}_p^\lambda$ en tant que $\mathbb{Z}_p$-module et G est de dimension de Lie $\lambda + 1$. Si de plus $\lambda = 1$ (comme c'est le cas pour $F = \mathbb{Q}(\mu_{37})^+$), $G \simeq \mathbb{Z}_p \ltimes \Gamma$ et l'extension F_∞/F est communément appelée « fausse courbe de Tate ».
4. La nullité de l'invariant μ de $\mathrm{Gal}(M_\Sigma/F_{cyc})$ va nous permettre de construire (avec l'aide de G. Perbet) une infinité d'exemples presque généraux. Il est connu que $\mu = 0$ si et seulement si le groupe de Galois sur F_{cyc} de la pro-p-extension Σ-ramifiée maximale F_Σ de F est pro-p-libre (sur λ générateurs). Soit P un pro-p-groupe p-valué au sens de Lazard, et dont le nombre minimal de générateurs soit inférieur ou égal à λ. Alors P est un quotient de $\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F_{cyc})$; notons L/F_{cyc} l'extension galoisienne de groupe P ainsi obtenue. L'extension L/F n'est pas a priori galoisienne. Soit F_∞ sa clôture galoisienne, qu'on peut décrire ainsi : pour tout $\sigma \in \Gamma$, choisissons un relèvement $\widetilde{\sigma}$ de σ à $G_\Sigma(p) \simeq H_\Sigma(p) \ltimes \Gamma$, où $G_\Sigma(p)$ (resp. $H_\Sigma(p)$) désigne le groupe de Galois sur F (resp. F_{cyc}) de la pro-p-extension Σ-ramifiée maximale de F (resp. F_{cyc}) ; par construction, l'extension F_∞/F_{cyc} est la composée de toutes les extensions de F_{cyc} obtenues à partir de L par conjugaison par tous les $\widetilde{\sigma}$ quand σ décrit Γ. Le groupe $\mathrm{Gal}(\widetilde{\sigma}(L)/F_{cyc})$ est le conjugué $\widetilde{\sigma}P\widetilde{\sigma}^{-1}$. Notons $\omega\colon P \longrightarrow R_+^* \cup \{\infty\}$ la filtration du groupe p-valué P (voir e.g. [**Ser95**]) et définissons une filtration $\omega_{\widetilde{\sigma}}$ sur $\widetilde{\sigma}P\widetilde{\sigma}^{-1}$ par $\omega_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\sigma}x\widetilde{\sigma}^{-1}) = \omega(x)$, ce qui fait de $\widetilde{\sigma}P\widetilde{\sigma}^{-1}$ un groupe p-valué. Notons que les filtrations ω et $\omega_{\widetilde{\sigma}}$ ont même image, et qu'elles sont automatiquement discrètes car P est de rang fini. En notant $\pi_{\widetilde{\sigma}}$ la surjection canonique $\mathrm{Gal}(F_\infty/F_{cyc}) \twoheadrightarrow \widetilde{\sigma}P\widetilde{\sigma}^{-1}$, on peut définir sur $\mathrm{Gal}(F_\infty/F_{cyc})$ une filtration Ω telle que $\Omega(x) = \mathrm{Inf}_{\widetilde{\sigma}}(\omega_{\widetilde{\sigma}}(\pi_{\widetilde{\sigma}}(x))) = \min_{\widetilde{\sigma}}(\omega_{\widetilde{\sigma}}(\pi_{\widetilde{\sigma}}(x)))$ (ici inf = min parce que l'image de $\omega_{\widetilde{\sigma}}$ est discrète). En résumé : $\mathrm{Gal}(F_\infty/F_{cyc})$ est un pro-p-groupe p-valué de filtration Ω.

Comme la catégorie des groupes de Lie p-adiques est stable par extension, $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est également un groupe de Lie p-adique.

2.2. Le contexte K-théorique. — La (CPE) va s'énoncer dans le contexte de la localisation des groupes de K-théorie en basses dimensions, plus précisément d'une suite exacte :

$$K_1(\Lambda(G)) \longrightarrow K_1(\Lambda(G)_S) \xrightarrow{\partial_S} K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \longrightarrow K_0(\Lambda(G)) \longrightarrow K_0(\Lambda(G)_S) \ .$$

Dans cette section, nous utiliserons librement les rappels de K-théorie faits dans l'exposé de W. Bley ([**Ble12**],§2) quitte à modifier quelques notations ou apporter quelques compléments.

2.2.1. Localisation d'un anneau par rapport à un ensemble de Øre. — La construction du localisé d'un anneau (associatif) commutatif R par rapport à un ensemble multiplicatif $S \subset R$, contenant 1, est bien connue. Si R n'est pas commutatif, le procédé reste immédiatement valable si S est central. Si S n'est pas central, on introduit la

Définition 2.2. — Un ensemble multiplicatif $S \subset R$, contenant 1, est appelé ensemble de Øre à gauche (resp. à droite) s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall r \in R, \forall s \in S, Sr \cap Rs \neq \emptyset$ (resp. $rS \cap sR \neq \emptyset$)
2. Si $s \in R$ vérifie $rs = 0$ (resp. $sr = 0$) pour un certain $s \in S$, il existe $s' \in S$ tel que $s'r = 0$ (resp. $rs' = 0$).

Si $S \subset R$ est un ensemble de Øre à gauche (resp. à droite), on peut construire un anneau localisé à gauche (resp. à droite) $S^{-1}R$ (resp. RS^{-1}) vérifiant les propriétés universelles habituelles. Ces dernières impliquent, si S est de Øre à gauche et à droite, l'existence d'un isomorphisme naturel $S^{-1}R \xrightarrow{\sim} RS^{-1}$.
Pour tout R-module à gauche (resp. à droite) M, pour tout ensemble de Øre S à gauche (resp. à droite), on peut construire le localisé à gauche (resp. à droite) $S^{-1}M = S^{-1}R \otimes_R M$ (resp. $MS^{-1} = M \otimes_R RS^{-1}$). Notons que le foncteur $M \rightsquigarrow S^{-1}M$ (resp. $M \rightsquigarrow MS^{-1}$) est exact.

2.2.2. Le K_0 relatif et la suite exacte de localisation. — Si $S \subset R$ est un ensemble de Øre, à gauche disons, on dispose d'au moins trois définitions équivalentes du groupe relatif $K_0(R, S^{-1}R)$:

1. Soit $i_S \colon R \longrightarrow S^{-1}R$ l'homomorphisme canonique défini par la localisation en S. Alors $K_0(R, S^{-1}R)$ est par définition $K_0(R, i_S)$ ([**Ble12**], §2.3).
2. Soit $\mathcal{H}_S$ la catégorie des R-modules de type fini, de dimension projective finie, et qui sont en plus de S-torsion (un R-module M est de S-torsion si $S^{-1}M = 0$). On note $K_0(\mathcal{H}_S)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{H}_S$, défini de la façon habituelle par générateurs et relations.
3. Soit $\mathcal{C}_S$ la catégorie des complexes bornés de R-modules noetheriens projectifs, et dont la cohomologie est de S-torsion. On note $K_0(\mathcal{C}_S)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{C}_S$.

Exercice 1. — : $K_0(R, S^{-1}R) = K_0(R, i_S) \simeq K_0(\mathcal{H}_S) \simeq K_0(\mathcal{C}_S)$ (ces isomorphismes peuvent être décrits explicitement ; voir [**Kak10**], juste après la définition 4). On peut maintenant énoncer le théorème de localisation de Bass-Berrick-Keating :

Théorème 2.3. — *Soit R un anneau (associatif) et soit $S \subset R$ un ensemble de Øre à gauche, ne contenant pas de diviseur de* 0*. On a une suite exacte canonique :*

$$K_1(R) \longrightarrow K_1(S^{-1}R) \xrightarrow{\partial_S} K_0(R, S^{-1}R) \longrightarrow K_0(R) \longrightarrow K_0(S^{-1}R)$$

On a une description explicite de ∂_S (voir [**Ble12**], §2.4) : ∂_S envoie $\alpha \in K_1(S^{-1}R)$ sur $[R^n, \widetilde{\alpha}, R^n]$, où $\widetilde{\alpha}$ est un relèvement quelconque de α dans $GL_n(S^{-1}R) \subset GL_\infty(S^{-1}R)$.

2.2.3. L'ensemble de Øre canonique. — Retournons à la situation arithmétique, avec les mêmes notations que depuis le début de ce §2. Prenons pour R l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda(G)$ (ou plus généralement $\Lambda_{\mathcal{O}}(G)$, $\mathcal{O}$ étant l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$; les raisonnements et résultats seront les mêmes que pour $\Lambda(G)$). Suivant Coates et al. ([**CFK$^+$05**],§2) introduisons l'*ensemble de Øre canonique* $S = S(G, H)$:

Définition 2.4. — $S = S(G, H)$ est l'ensemble des $f \in \Lambda(G)$ tels que $\Lambda(G)/\Lambda(G)f$ soit un $\Lambda(H)$-module de type fini.

Citons sans démonstration (voir [**CFK$^+$05**], [**Kak10**]) les propriétés suivantes :

1. S est un ensemble de Øre à gauche et à droite. On notera $\Lambda(G)_S$ au lieu de $S^{-1}\Lambda(G)$ ou $\Lambda(G)S^{-1}$.
2. On a $\Lambda(G) \hookrightarrow \Lambda(G)_S$ et $\Lambda(G)_S^\times \twoheadrightarrow K_1(\Lambda(G)_S)$.
3. L'algèbre localisée $\Lambda(G)_S$ est semi-locale.
4. Un $\Lambda(G)$-module M est de S-torsion si et seulement si M est de type fini sur $\Lambda(H)$.
5. S ne contient pas de diviseurs de 0 donc on a une suite exacte

$$K_1(\Lambda(G)) \longrightarrow K_1(\Lambda(G)_S) \xrightarrow{\partial_S} K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \longrightarrow K_0(\Lambda(G)) \longrightarrow K_0(\Lambda(G)_S)\ .$$

Une simplification importante du 5 réside dans le lemme suivant :

Lemme 2.5. — *L'homomorphisme de connexion ∂_S est surjectif, i.e. l'on a une suite exacte*

$$K_1(\Lambda(G)) \longrightarrow K_1(\Lambda(G)_S) \xrightarrow{\partial_S} K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \longrightarrow 0\ .$$

(voir e.g. [**Kak10**], lemma 5).
La surjectivité énoncée dans le lemme 2.5 permet d'associer à toute classe $[M] \in K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S)$ un « élément caractéristique » $f_M \in K_1(\Lambda(G)_S)$ tel que $\partial_S(f_M) = [M]$. C'est déjà une amorce de (CPE), comme le montre l'étude du cas particulier classique où $G = \Gamma$.

2.2.4. Le cas particulier $G = \Gamma$. — Dans ce cas, $H = (1)$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ est l'algèbre d'Iwasawa classique. Pour tout $f \in \Lambda \setminus (0)$, il est immédiat que $\Lambda/\Lambda f$ est de type fini si et seulement si $p \nmid f$, donc l'ensemble canonique n'est autre que $\Lambda \setminus p\Lambda$. De plus, la catégorie $\mathcal{H}_S$ introduite dans 2.2.2 n'est autre que la catégorie des Λ-modules noetheriens de torsion dont « la » série caractéristique n'est pas divisible par p (i.e. d'invariant μ nul). Comme l'image d'un Λ-module fini (pseudo-nul) dans $K_0(\mathcal{H}_S)$ est nulle (Schneider-Venjakob), si M est pseudo-isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^{r} \Lambda/\Lambda f_i$, $p \nmid f_i$, alors $[M] = \sum_{i=1}^{r} [\Lambda/\Lambda f_i]$ et la description explicite de ∂_S montre que $\partial_S(f_M) = [M]$, où $f_M = \prod_{i=1}^{m} f_i$ est « la » série caractéristique de M.

2.2.5. Le point de vue de Ritter-Weiss. — Ritter et Weiss introduisent et étudient une CPE correspondant à une extension admissible dont le groupe de Galois est de dimension de Lie égale à 1. Ils localisent l'algèbre $\Lambda(G)$ par rapport à l'ensemble S des non-diviseurs de zéro appartenant au centre de $\Lambda(G)$. Le localisé $\Lambda(G)_{\mathcal{S}}$ n'est alors autre que l'anneau total des fractions $Q(\Lambda(G))$, et le groupe relatif $K_0(\Lambda(G), Q(\Lambda(G)))$, noté habituellement $K_0T(\Lambda(G))$, n'est autre que le groupe de Grothendieck $K_0(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ de la catégorie des $\Lambda(G)$-module noetheriens de torsion qui sont de dimension projective finie. La suite exacte de localisation s'écrit dans ce cas :

$$K_1(\Lambda(G)) \longrightarrow K_1(Q(\Lambda(G))) \xrightarrow{\partial} K_0T(\Lambda(G)) \longrightarrow K_0(\Lambda(G)) \longrightarrow K_0(Q(\Lambda(G))) \ .$$

2.3. L'objet arithmétique. — Comme depuis le début, l'objet arithmétique central est $X = \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)$, où M_∞ est la pro-p-extension abélienne Σ-ramifiée maximale de F_∞. Il est connu que X est un $\Lambda(G)$-module noetherien de torsion (Ochi-Venjakob). Si le groupe de Lie p-adique G est sans p-torsion, X est un module de $\Lambda(G)$-dimension projective finie, auquel on peut alors associer des invariants fonctoriels intéressants tels que son idéal de Fitting initial ou sa caractéristique d'Euler-Poincaré (voir [**CFK$^+$05**]). Mais ce n'est plus le cas en général si G possède de la p-torsion. L'idée est de remplacer X par un complexe parfait de $\Lambda(G)$-modules qui, en quelque sorte, « approxime » X tout en possédant une interprétation K-théorique.

2.3.1. Le complexe canonique. — On note $C(F_\infty/F)$ le complexe de cohomologie étale $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(\mathbf{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F_\infty}[1/\Sigma]), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, où $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est le faisceau constant correspondant au groupe abélien $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ sur le site étale $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F_\infty}[1/\Sigma])$. Comme $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est une limite inductive de p-groupes on a une interprétation peut-être plus familière en termes de cohomologie galoisienne :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{F_\infty}[1/\Sigma]), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbf{R}\Gamma(\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),$$

où F_Σ est l'extension Σ-ramifiée maximale de F. Rappelons quelques propriétés essentielles du complexe $C(F_\infty/F)$ (voir e.g. [**FK06**]) :

– Le complexe $C(F_\infty/F)$ est *parfait*, i.e. quasi-isomorphe à un complexe borné de $\Lambda(G)$-modules noetheriens projectifs. Par abus de langage, on confondra souvent un tel quasi-isomorphisme avec une égalité dans la catégorie dérivée.
– Le complexe est acyclique sauf en degré 0 et -1, i.e. $H^i(C(F_\infty/F)) = 0$ si $i \neq 0, -1$. Plus précisément $H^0(C(F_\infty/F)) = \mathbb{Z}_p$ et $H^{-1}(C(F_\infty/F)) = X$.
– dans un langage peut-être plus familier, l'existence du complexe $C(F_\infty/F)$ équivaut à l'existence (qui est un résultat de cohomologie galoisienne) d'une suite exacte de $\Lambda(G)$-modules

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow \Lambda(G) \xrightarrow{\text{aug}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0, \tag{1}$$

où aug dénote l'augmentation et $Y = Y(F_\infty/F)$ est un certain $\Lambda(G)$-module canonique de dimension projective ≤ 1 ([**NQD84**], [**RW02b**]).

Pour avoir un interprétation K-théorique du complexe $C(F_\infty/F)$, il faut imposer une condition supplémentaire à l'extension F_∞/F.

2.3.2. Condition « $\mu = 0$ ». — On suppose que l'extension admissible F_∞/F est telle qu'il existe un pro-p-sous-groupe ouvert H' tel que le groupe de Galois sur $F_\infty^{H'}$ de la pro-p-extension abélienne Σ-ramifiée maximale de $F_\infty^{H'}$ soit un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini.

Cette condition n'est qu'un cas particulier de la conjecture classique d'Iwasawa qui stipule que pour toute extension finie $K/\mathbb{Q}$, le groupe de Galois sur K_{cyc} de la pro-p-extension abélienne Σ-ramifiée maximale de K_{cyc} a un invariant μ nul ; si l'extension $K/\mathbb{Q}$ est abélienne, c'est le théorème de Ferrero-Washington.

Par inflation-restriction on montre facilement le

Lemme 2.6. — *$X = \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)$ est de type fini sur $\Lambda(H)$ si et seulement si F_∞/F vérifie la condition « $\mu = 0$ ». (On rappelle que $H = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_{cyc})$.)*

Donc, si l'extension admissible F_∞/F vérifie « $\mu = 0$ » (ce qu'on supposera désormais), le complexe $C(F_\infty/F)$ est de S-torsion. D'après le §2.2, sa classe dans le groupe $K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S)$ existe, et sera notée $[C(F_\infty/F)]$: c'est l'objet arithmétique de la CPE.

Exercice 2. — : si X est de dimension projective finie (e.g. si G est sans p-torsion) montrer que $[C(F_\infty/F)] = [\mathbb{Z}_p] - [X]$.

2.3.3. Le point de vue de Ritter-Weiss. — Si G est de dimension 1 (i.e. H est fini), Ritter-Weiss placent la suite exacte (1) dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \Lambda(G) \arrow[r, "="] \arrow[d, "\psi"] & \Lambda(G) \arrow[d, "\psi'"] & \\ X \arrow[r, hook] & Y \arrow[r] & \Lambda(G) \arrow[r, two heads, "\text{aug}"] & \mathbb{Z}_p, \end{tikzcd}$$

tel que $\text{aug} \circ \psi' = 0$. La classe $\mho_\Sigma \in K_0T(\Lambda(G))$ définie par $\mho_\Sigma = [\mathrm{Coker}\,\psi] - [\mathrm{Coker}\,\psi']$ est indépendante du choix de (ψ, ψ'). Elle est notée $\widetilde{\mho}_S$ dans [**RW06**] et c'est l'objet arithmétique de la CPE en dimension 1 selon Ritter-Weiss.

Exercice 3. — : le morphisme naturel $K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \longrightarrow K_0T(\Lambda(G))$ envoie $[C(F_\infty/F)]$ sur $-\mho_\Sigma$.

2.4. L'objet analytique. — On a vu au §1.3 que, pour un groupe $G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ abélien de dimension 1, la pseudo-mesure de Deligne-Ribet $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$, qui « connaît » toutes les fonctions $L_{\Sigma,p}(s, \psi)$, vit dans l'anneau total des fractions $Q\Lambda(G)$, plus précisément dans le localisé $\Lambda(G)_{(p)}$. Si en outre « $\mu = 0$ », $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ est une unité du localisé, noté $\Lambda(G)_\bullet$ dans [**RW06**], obtenu en inversant tous les éléments centraux de $\Lambda(G)$ qui sont réguliers (= non diviseurs de 0) dans $\Lambda(G)/p\Lambda(G)$. But : généraliser $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ à toute extension admissible F_∞/F.

2.4.1. — Pour toute représentation d'Artin (i.e. à noyau ouvert) ρ de G sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$, pour tout plongement $\nu\colon \overline{\mathbb{Q}}_p \longrightarrow \mathbb{C}$, notons $L_\Sigma(s, \nu \circ \rho)$ la fonction L archimédienne privée des facteurs euleriens correspondant aux places finies de Σ. Un théorème classique de Siegel dit que, pour tout entier positif impair n, la valeur $L_\Sigma(1 - n, \nu \circ \rho)$ est un nombre algébrique ; si le plongement ν est remplacé par un autre plongement, ce nombre algébrique est remplacé par un conjugué dans $\overline{\mathbb{Q}}$, mais Siegel a en fait montré qu'il existe un choix canonique de ce conjugué, de sorte qu'on peut parler de *« la » valeur algébrique* $L_\Sigma(1 - n, \rho)$, qui dépend du caractère (encore noté ρ) de la représentation d'Artin. Comme pour les caractères (abéliens) ψ de dimension 1, on peut alors chercher à interpoler ces valeurs algébriques par une fonction p-adique $L_{\Sigma,p}(s, \rho)$. C'est ce qu'a fait Greenberg ([**Gre83**]), par induction de Brauer à partir de fonctions $L_{\Sigma,p}(s, \psi)$.
Pour toute extension finie $L/\mathbb{Q}_p$, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}$, définissons maintenant une fonction : $K_1(\Lambda(G))_S \longrightarrow L \cup \{\infty\}, f \mapsto f(\rho)$ qui nous permettra de parler de *la valeur d'un élément du* K_1*(localisé) « en* ρ *»*, où ρ est un homomorphisme continu de G dans $GL_n(\mathcal{O})$. Une telle représentation induit un homomorphisme d'anneaux de $\Lambda(G)$ dans $M_n(\Lambda_\mathcal{O}(\Gamma))$, définie par $\sigma \mapsto \rho(\sigma)\bar{\sigma}$, où $\bar{\sigma}$ est l'image de σ dans Γ. Il est montré dans [**CFK**[+]**05**] que cet homomorphisme s'étend en un homomorphisme de $\Lambda(G)_S$ dans $M_n(Q_\mathcal{O}(\Gamma))$ (où $Q_\mathcal{O}(\Gamma)$ est le corps des fractions de $\Lambda_\mathcal{O}(\Gamma)$), qui induit à son tour un homomorphisme $\varphi_\rho\colon K_1(\Lambda(G)_S) \longrightarrow K_1(M_n(Q_\mathcal{O}(\Gamma)))$. Par équivalence de Morita, $K_1(M_n(Q_\mathcal{O}(\Gamma))) \simeq K_1(Q_\mathcal{O}(\Gamma)) \simeq Q_\mathcal{O}(\Gamma)^\times$. Considérons par ailleurs l'augmentation $\Lambda_\mathcal{O}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{O}$, dont le noyau est un idéal premier $\wp$. Par localisation en $\wp$, nous obtenons un homomorphisme aug : $\Lambda_\mathcal{O}(\Gamma)_\wp \longrightarrow L$, que nous pouvons étendre en $\widetilde{\mathrm{aug}}\colon Q_\mathcal{O}(\Gamma) \longrightarrow L \cup \{\infty\}$ envoyant tout $x \in Q_\mathcal{O}(\Gamma) \setminus \Lambda_\mathcal{O}(\Gamma)_\wp$ sur ∞. En composant φ_ρ avec $\widetilde{\mathrm{aug}}$, nous obtenons l'homomorphisme cherché $K_1(\Lambda(G))_S \longrightarrow L \cup \{\infty\}, f \mapsto f(\rho)$. Cet homomorphisme possède certaines propriétés fonctorielles qui interviendront dans la partie « théorie des groupes » de la démonstration de la CPE, et pour lesquelles on renvoie à [**CFK**[+]**05**] ou [**Kak10**].

2.4.2. — La première propriété exigée de l'hypothétique pseudo-mesure $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ est alors :
(P1) Soit F_∞/F *une extension admissible, et soient* Σ, S *les ensembles précédemment associés à* F_∞/F*. Il existe* $\zeta_\Sigma(F_\infty/F) \in K_1(\Lambda(G)_S)$ *tel que, pour tout caractère d'Artin* ρ *de* G*, pour*

tout entier positif n divisible par $(p-1)$, on ait :

$$\zeta_\Sigma(F_\infty/F)(\rho\kappa_F^n) = L_\Sigma(1-n,\rho)$$

(P1) est une propriété d'interpolation, mais globale (par opposition à « caractère par caractère ») : la pseudo-mesure ζ_Σ « connaît » toutes les fonctions $L_{\Sigma,p}(s,\rho)$, ρ parcourant les caractères d'Artin de G. Pour mieux insister sur la nature globale de ζ_Σ, revenons au cas où G est de dimension 1, abélien, i.e. $G \simeq H \times \Gamma$, avec H fini (mais d'ordre pas forcément premier avec p). Avec les notations du §1.3, on voit sans difficulté que pour tout caractère $\psi \in \widehat{G}$, l'image $\widetilde{\psi}(\zeta_\Sigma) = G_{\psi,\Sigma}(T)/H_\psi(T)$ vit dans le localisé $\mathcal{O}_\psi[[T]]^\times_{\wp_\psi}$, où $\mathcal{O}_\psi = \mathbb{Z}_p[\psi]$ et $\wp_\psi$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_\psi$ (pour des détails voir §2.7 ci-dessous), et donc l'élément $\prod_{\psi\in\widehat{G}} \widetilde{\psi}(\zeta_\Sigma)$ de $\prod_{\psi\in\widehat{G}} \mathcal{O}_\psi[[T]]^\times_{\wp_\psi}$ « connaît » aussi toutes les fonctions $L_{\Sigma,p}(s,\psi)$. Mais c'est un élément « semi-simplifié », pas global. L'approche de Ritter-Weiss apporte là-dessus un éclairage peut-être plus fonctoriel :

2.4.3. Le point de vue de Ritter-Weiss. — Dans toute cette sous-section, G sera de dimension 1, mais pas forcément abélien, donc $G \simeq \Gamma \ltimes H$, avec H fini, non forcément abélien. D'après Greenberg ([**Gre83**]), pour tout caractère ψ de G, la construction de la fonction $L_{\Sigma,p}(s,\psi)$ se fait comme dans le §1.3, i.e. $L_{\Sigma,p}(1-s,\psi) = G_{\psi,\Sigma}(u^s-1)/H_\psi(u^s-1)$ (c'est indépendant du choix de u). Soit $\mathrm{Irr}_p(G)$ l'ensemble des caractères p-adiques irréductibles d'ordre fini de G, et soit $R_p(G)$ l'anneau des caractères virtuels de G. Suivant [**RW04**], introduisons l'élément $L_{F,\Sigma} \in \mathrm{Hom}(R_p(G), (\bar{\mathbb{Q}}_p \otimes Q\Lambda(\Gamma))^\times)$ défini par $L_{F,\Sigma}(\psi) = G_{\psi,\Sigma}(\gamma-1)/H_\psi(\gamma-1)$ (c'est indépendant du choix de γ). En fait on vérifie directement sur la définition que l'homomorphisme $L_{F,\Sigma}$ appartient au sous-groupe $\mathrm{Hom}^*(R_p(G), (\bar{\mathbb{Q}}_p \otimes Q\Lambda(\Gamma))^\times)$ formé des $f\colon R_p(G) \longrightarrow (\bar{\mathbb{Q}}_p \otimes Q\Lambda(\Gamma))^\times$ tels que $f(\psi^\sigma) = f(\psi)^\sigma$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et $f(\psi\otimes\rho) = \rho^\#(f(\psi))$ pour tout caractère ρ de type W (où $\rho^\#$ est l'automorphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_p \otimes Q\Lambda(\Gamma)$ défini par $\rho^\#(\gamma) = \rho(\gamma).\gamma$). En utilisant la « description Hom » des algèbres de groupes à la Fröhlich, Ritter-Weiss montrent que $\mathrm{cent}(Q\Lambda(G))^\times$ s'identifie canoniquement au groupe Hom^* précédent, et donc que la norme réduite $Nr\colon K_1(Q\Lambda(G)) \longrightarrow \mathrm{cent}(Q\Lambda(G))^\times$ peut être vue comme un homomorphisme, noté det, de $K_1(Q\Lambda(G))$ dans $\mathrm{Hom}^*(R_p(G), (\bar{\mathbb{Q}}_p \otimes Q\Lambda(\Gamma)))$ ([**RW04**], theorem 8). Dans ce langage, la propriété (P_1) est remplacée par :

(P_1') *Il existe $\Theta_\Sigma \in K_1(Q\Lambda(G))$ tel que* $\det(\Theta_\Sigma) = L_{F,\Sigma}$. *Si « $\mu = 0$ », Θ_Σ appartient en fait à $K_1(\Lambda(G)_\bullet)$, où $\Lambda(G)_\bullet$ est obtenu à partir de $\Lambda(G)$ en inversant tous les éléments centraux qui sont réguliers modulo p.*

2.5. Énoncé de la CPE. — La CPE (ou CPNC) relie fonctoriellement les deux objets algébrique et analytique

2.5.1. — Avec les notations précédentes :

(CPE) Soit F_∞/F une extension admissible, vérifiant l'hypothèse « $\mu = 0$ ». Il existe un (unique) élément $\zeta_\Sigma(F_\infty/F) \in K_1(\Lambda(G)_S)$ tel que :

(i) Pour tout caractère d'Artin ρ de G, pour tout entier positif n divisible par $(p-1)$, $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)(\rho\kappa_F^n) = L_\Sigma(1-n,\rho)$

(ii) Le morphisme de liaison $\partial_S\colon K_1(\Lambda(G)_S) \longrightarrow K_0(\Lambda(G),\Lambda(G)_S)$ *envoie* $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ *sur* $-[C(F_\infty/F)]$.

2.5.2. — Dans le cas particulier de dimension 1, Ritter-Weiss ([**RW04**]) proposent la version suivante :

(CPE1) Supposons en outre que G est de dimension 1. Il existe un (unique) élément $\Theta_\Sigma \in K_1(Q\Lambda(G))$ *tel que* $\det(\Theta_\Sigma) = L_{F,\Sigma}$ *et* $\partial(\Theta_\Sigma) = \mho_\Sigma$, *où* ∂ *est le morphisme de liaison* $K_1(Q\Lambda(G)) \longrightarrow K_0T(\Lambda(G))$.

2.5.3. Sur l'unicité. — Sauf dans des cas particuliers (comme dans le cas commutatif, voir §2.6), l'unicité de la pseudo-mesure $\zeta_\Sigma(F_\infty/F) \in K_1(\Lambda(G)_S)$ n'est pas connue.
Dans le cas où G est de dimension 1, l'unicité équivaut à $\mathrm{Ker}(Nr) = SK_1(Q\Lambda(G)) = (1)$ (voir [**RW04**], remark E). Une conjecture de Suslin prédit que $SK_1(A) = (1)$ pour toute algèbre centrale simple A sur un corps de dimension cohomologique ≤ 3. Or le corps $Q\Lambda(\Gamma)$ est de dimension cohomologique 3 d'après un résultat de Kato, et donc le corps $\mathrm{cent}(Q\Lambda(G))$ possède la même propriété.
En dimension supérieure, M. Kakde ([**Kak10**], 2.5) propose de regarder l'unicité non plus dans $K_1(\cdot)$, mais dans $K_1'(\cdot) = K_1(\cdot)/SK_1(\cdot)$. Plus précisément, définissons $SK_1(\Lambda_{\mathcal{O}}(G) := \varprojlim_U SK_1(\mathcal{O}(G/U)) = \varprojlim_U \mathrm{Ker}(K_1(\mathcal{O}[G/U]) \longrightarrow K_1(L[G/U]))$, U parcourant les sous-groupes ouverts de G, et désignons par $SK_1(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)_S)$ l'image de $SK_1(\Lambda_{\mathcal{O}}(G))$ par l'homomorphisme naturel $K_1(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)) \longrightarrow K_1(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)_S)$, d'où une suite exacte de localisation

$$K_1'(\Lambda(G)) \longrightarrow K_1'(\Lambda(G)_S) \xrightarrow{\partial_S} K_0(\Lambda(G),\Lambda(G)_S) \longrightarrow 0$$

La CPE modifiée s'énonce ainsi :
(CPE') Soit F_∞/F *une extension admissible, vérifiant l'hypothèse « $\mu = 0$ ». Il existe un unique élément* $\zeta_\Sigma(F_\infty/F) \in K_1'(\Lambda(G)_S)$ *tel que*
– *Pour tout caractère d'Artin* ρ *de* G, *pour tout entier positif* n *divisible par* $(p-1)$,

$$\zeta_\Sigma(F_\infty/F)(\rho\kappa_F^n) = L_\Sigma(1-n,\rho)$$

– *Le morphisme de liaison*

$$\partial_S\colon K_1'(\Lambda(G)_S) \longrightarrow K_0(\Lambda(G),\Lambda(G)_S)$$

envoie $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ *sur* $-[C(F_\infty/F)]$.
On peut bien entendu énoncer aussi une conjecture (CPE'1) à la Ritter-Weiss.

Exercice 4. — : avec les notations du §2.4, montrer que $SK_1(\Lambda(G)_S) = \mathrm{Ker}\,\partial_S \cap (\cap_\rho(\widetilde{\mathrm{aug}}\varphi_\rho))$, ρ parcourant toutes les représentations d'Artin de G (voir [**Bur10**]).
Ce résultat permet de montrer qu'en dimension 1, la conjecture (CPE1) (sans l'assertion d'unicité) entraîne la conjecture (CPE'1). En effet, dans la formulation de la (CPE'1), les conditions $\det(\Theta_\Sigma) = L_{F,\Sigma}$ et $\partial_\bullet(\Theta_\Sigma) = \mho_\Sigma$ (où $\partial_\bullet$ désigne évidemment le morphisme de liaison $K_1(\Lambda(G)_\bullet) \longrightarrow K_0(\Lambda(G),\Lambda(G)_\bullet)$ montrent que Θ_Σ est unique modulo $\mathrm{Ker}\,\partial_\bullet \cap \mathrm{Ker}\det = SK_1(\Lambda(G)_S)$ d'après l'exercice 3 et le §2.6 ci-après.

2.6. Comparaison des conjectures (CPE) et (CPE1) en dimension 1. — On se propose de montrer qu'en dimension 1, les conjectures (CPE) et (CPE1) coïncident. Supposons donc que $\dim G = 1$, i.e. H est fini. Un $\Lambda(G)$ module noetherien est alors de S-torsion si et seulement si c'est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, ou, de façon équivalente, il est annulé par un élément de $\Lambda(\Gamma) \setminus p\Lambda(\Gamma)$, pour un certain sous-groupe ouvert $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ de G. Il en résulte que $K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) = K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_\bullet)$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_1(\Lambda(G)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1(\Lambda(G))_\bullet \arrow[r, "\partial_\bullet"] \arrow[d] & K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_\bullet) \arrow[d, equal] \\
K_1(\Lambda(G)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1(\Lambda(G))_S \arrow[r, "\partial_S"] \arrow[d] & K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \arrow[d, "\mathrm{nat}"] \\
K_1(\Lambda(G)) \arrow[r] & K_1(Q\Lambda(G)) \arrow[r, "\partial"] & K_0T(\Lambda(G))
\end{tikzcd}$$

L'équivalence de (CPE) et (CPE1) résulte immédiatement d'une chasse dans ce diagramme et de l'égalité $\mathrm{nat}([C(F_\infty/F)]) = -\mho_\Sigma$ (exercice 2).

Remarque 2.7. — On verra plus loin (proposition 3.2 de la section 3.2) un résultat beaucoup plus fort, à savoir l'équivalence des conjectures (CPE') et (CPE'1).

2.7. Comparaison de la (CPE1) commutative et de la (CPC). — Si G est abélien de dimension 1, la (CPE1) est une amélioration équivariante de la (CPC) (ou théorème de Wiles). Elle a été prouvée par Ritter et Weiss dans [**RW02b**]. On va en redonner une démonstration suivant [**Kak10**], §3, dans le contexte de la (CPE) (voir l'énoncé 2.5.1), et qui aura le mérite de souligner clairement la différence entre les points de vue équivariant et « semi-simplifié ».

Théorème 2.8. — *Si G est un groupe de Lie p-adique de dimension 1, abélien, la (CPE1) est vraie.*

Rappel : si le corps totalement réel F vérifie la conjecture de Leopoldt et si $G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est abélien, alors G est nécessairement de dimension 1.

Démonstration. — Soit F_∞/F une extension admissible telle que $G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ soit abélien de dimension 1. Alors $G \simeq H \times \Gamma$ avec $H = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_{cyc})$ fini abélien. Pour tout caractère d'Artin ρ de G, notons $\mathcal{O}_\rho = \mathbb{Z}_p[\rho]$, π_ρ = une uniformisante de $\mathcal{O}_\rho$, F_ρ = le corps fixe de $\mathrm{Ker}\,\rho$, M_ρ = la pro-p-extension abélienne maximale de $F_\rho F_{cyc}$ non ramifiée hors de Σ, $X_\rho = \mathrm{Gal}(M_\rho/F_\rho F_{cyc})$. Soit $\zeta_\Sigma = \zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ la pseudo-mesure de Deligne-Ribet associée à G (voir §1.3).

Lemme 2.9. — *ζ_Σ est une unité de $\Lambda(G)_S$.*

En effet, décomposons H sous la forme $H = H' \times H_p$ où H_p est le p-sous-groupe de Sylow de H. Alors $\Lambda(G)_S \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\psi \in \widehat{H}'} \Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(H_p \times \Gamma)_S$, $\widehat{H}'$ désignant l'ensemble des caractères irréductibles de H'. Chaque composante $\Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(H_p \times \Gamma)_S$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}_\psi = \{x \in$

$\Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(H_p \times \Gamma)_S; \mathbf{1}(x) \in \pi_\psi \Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(\Gamma)_S\}$. Or, pour tout $\psi \in \widehat{H}'$, l'élément $(\psi \times \mathbf{1})(\zeta_\Sigma)$ de $\Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(\Gamma)_S$ n'appartient pas à $\pi_\psi \Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(\Gamma)_S$ à cause de l'hypothèse $\mu = 0$. QED
Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.8. La propriété la plus difficile à montrer est l'identité $\partial_S(\zeta_\Sigma(F_\infty/F)) = -[C(F_\infty/F)]$ (voir 2.5.1 (ii)). Considérons le diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Lambda(G)^\times \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & \Lambda(G)_S^\times \arrow[r, "\partial_S"] \arrow[d, "\theta_S"] & K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_0"] & 0 \\
1 \arrow[r] & \prod_\psi \Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(\Gamma)^\times \arrow[r] & \prod_\psi \Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(\Gamma)_S^\times \arrow[r, "\partial_S"] & \prod_\psi K_0(\Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(\Gamma), \Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(\Gamma)_S) \arrow[r] & 0 ,
\end{tikzcd}$$

où ψ parcourt l'ensemble $\widehat{H}$ des caractères irréductibles de H et les flèches verticales sont définies naturellement. En particulier, $\theta_0([P^\bullet]) = \left(\left[\Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(\Gamma) \bigotimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda(G)} P^\bullet\right]\right)_\psi$ pour tout complexe $P^\bullet$ de $\Lambda(G)$-modules dont la cohomologie est de S-torsion. Notons $[C_\psi^\bullet]$ la composante en ψ de $\theta_0([C(F_\infty/F)])$. La cohomologie du complexe $C_\psi^\bullet$ est donnée par :

$$H^i(C_\psi^\bullet) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq 0, -1 \\ X_\psi \text{ si } i = -1 \\ \mathbb{Z}_p \text{ si } i = 0 \text{ et } \psi = \mathbf{1} \\ 0 \text{ si } i = 0 \text{ et } \psi \neq \mathbf{1} \end{cases}$$

La (CPC) (théorème de Wiles) dit que $\forall \psi \in \widehat{H}, \partial(\psi(\zeta_\Sigma)) = -[C_\psi^\bullet]$, et donc la ligne exacte inférieure peut-être vue comme une version semi-simplifiée de l'énoncé 2.5.1 (ii). Pour montrer l'énoncé « global », il suffit, compte-tenu du lemme 2.9 et du diagramme commutatif précédent, de montrer l'injectivité de θ_0. Or θ et θ_S sont injectifs par construction, donc il suffira, par le lemme du serpent, de montrer que $\operatorname{Coker}\theta$ s'injecte dans $\operatorname{Coker}\theta_S$. Soit $x \in \Lambda(G)_S^\times$ tel que $\theta_S(x) = (x_\psi) \in \prod_\psi \Lambda_{\mathcal{O}_\psi}(\Gamma)^\times$. Alors $x = \dfrac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h(\sum_{\psi \in \widehat{H}} x_\psi \psi(h^{-1}))$ et donc $x \in \Lambda(G)[1/p] \cap \Lambda(G)_S = \Lambda(G)$. De même, $x^{-1} \in \Lambda(G)$, donc $x \in \Lambda(G)^\times$. On a ainsi montré que $\operatorname{Coker}\theta$ s'injecte dans $\operatorname{Coker}\theta_S$, ce qui achève la preuve de 2.5.1 (ii). Il reste à montrer la propriété d'interpolation p-adique pour toute représentation d'Artin ρ de G. On peut évidemment se ramener au cas où ρ est irréductible, donc de dimension 1 puisque G est abélien. Mais alors il ne reste rien à montrer, puisque aussi bien l'interpolation p-adique que l'unicité de la pseudo-mesure sont assurées par le théorème de Deligne-Ribet. $\square$

3. Schéma de démonstration de la CPE'

La CPE (sans l'assertion d'unicité) a été démontrée par Ritter-Weiss ([**RW11**]) et, indépendamment, la CPE' par M. Kakde ([**Kak10**]). La preuve de Kakde étant à notre avis techniquement plus simple à suivre, c'est son principe que nous allons exposer ici. Les notations générales restent celles du §2.

3.1. La stratégie de Burns-Kato. — Technique mise à part, il est clair que toute tentative de démonstration de la CPE doit commencer par :

– une description aussi précise que possible des groupes $K_1(\Lambda(G))$ et $K_1(\Lambda(G))_S$

– puisque l'objet arithmétique $[C(F_\infty/F)]$ est déjà donné, une étude de l'existence de l'objet analytique $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$.

En restant un peu vague, on peut dire que la stratégie de Burns-Kato pour atteindre ces deux objectifs consiste à se ramener à des sous-quotients abéliens de G auxquels on applique la CPC (théorème de Wiles) avant de recoller ensemble les informations abéliennes ainsi obtenues. Kato ([**Kat05**]) en a donné les modalités précises pour étudier $K_1(\Lambda(G))$ et $K_1(\Lambda(G)_S)$, puis Burns (aux journées Iwasawa 2006 de Limoges) des modalités analogues pour construire $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$. Précisons maintenant la stratégie de Burns-Kato.

Soit I une famille de paires (U,V), où U est un sous-groupe ouvert de G et V un sous-groupe ouvert de H, distingué dans U et tel que le quotient U/V soit abélien. Pour tout $(U,V)\in I$, on a un homomorphisme composé

$$\theta_{U,V}\colon K_1(\Lambda(G)) \overset{N_{G,U}}{\longrightarrow} K_1(\Lambda(U)) \overset{\text{nat}}{\longrightarrow} K_1(\Lambda(U/V)) = \Lambda(U/V)^\times \ ,$$

où $N_{G,U}$ est la norme en K-théorie. Si S désigne l'ensemble de Øre canonique pour G et (par abus de langage) pour U/V, on a de même $\theta_{S,U/V}\colon K_1(\Lambda(G)_S) \longrightarrow \Lambda(U/V)_S^\times$. Posons :

$$\theta = (\theta_{U/V})_I\colon K_1(\Lambda(G)) \longrightarrow \prod_{(U,V)\in I} \Lambda(U/V)^\times \quad \text{et}$$

$$\theta = (\theta_{S,U/V})_I\colon K_1(\Lambda(G)_S) \longrightarrow \prod_{(U,V)\in I} \Lambda(U/V)_S^\times \ .$$

L'idée est qu'un choix judicieux de I permettrait de décrire les images de θ et θ_S, et même, si I est « assez gros », d'avoir l'injectivité de θ. Pour cerner les images, on introduit deux sous-groupes $\Phi \subset \prod_I \Lambda(U/V)^\times$ et $\Phi_S \subset \prod_I \Lambda(U/V)_S^\times$ tels que $\Phi = \Phi_S \cap \prod_I \Lambda(U/V)_S^\times$, et pour faire le lien avec θ, θ_S et I on impose les conditions suivantes :

(θ_1) $\operatorname{Im}\theta = \Phi$

(θ_2) $\operatorname{Im}\theta_S \subset \Phi_S$

(θ_3) Pour toute représentation d'Artin ρ de G, ρ est une $\mathbb{Z}$-combinaison linéaire (finie) de représentation induites $\operatorname{Ind}_{U_j}^G(\chi_j)$, où $(U_j,V_j)\in I$ et χ_j est un caractère d'ordre fini de U_j/V_j.

Alors :

Proposition 3.1. — *Soit F_∞/F une extension admissible vérifiant « $\mu = 0$ ». S'il existe θ, θ_S, I vérifiant les conditions $(\theta_1), (\theta_2), (\theta_3)$ et si $(\zeta_\Sigma(F_\infty^V/F_\infty^U)_I \in \Phi_S$, alors $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ existe et vérifie $\partial_S(\zeta_\Sigma(F_\infty/F)) = -[C(F_\infty/F)]$. Si de plus θ est injectif, $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ est unique.*

Démonstration. — Supposons $(\zeta_\Sigma(F_\infty^V/F_\infty^U))_I \in \Phi_S$ et prenons $f \in K_1(\Lambda(G))_S$ tel que

$$\partial_S(\zeta_\Sigma(F_\infty/F)) = -[C(F_\infty/F)].$$

En posant $f_{U,V} = \theta_{S,U/V}(f)$, on a $(f_{U,V})_I \in \Phi_S$ d'après (θ_2). Mais l'homomorphisme naturel

$$K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \longrightarrow \prod_I K_0(\Lambda(U/V), \Lambda(U/V)_S)$$

envoie $[C(F_\infty/F)]$ sur $([C(F_\infty^V/F_\infty^U)])_I$, donc $\partial(f_{U,V}) = -[C(F_\infty^V/F_\infty^U)]$ pour tout $(U,V) \in I$, d'après Wiles. Cela équivaut à $f_{U,V}^{-1}\zeta_\Sigma(F_\infty^V/F_\infty^U) \in \Lambda(U/V)^\times$ pour tout $(U,V) \in I$, et comme l'élément $v = (f_{U,V}^{-1}\zeta_\Sigma(F_\infty^V/F_\infty^U))_I$ appartient aussi à Φ_S, la relation entre Φ et Φ_S donne $v \in \Phi$, et la condition (θ_1) fournit un u dans $K_1(\Lambda(G)_S)$ tel que $\theta(u) = v$. Par abus de langage, notons encore u l'image de u dans $K_1(\Lambda(G)_S)$ et montrons que uf est la pseudo-mesure $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ cherchée. Nous avons déjà $\partial_S(uf) = -[C(F_\infty/F)]$. Reste à montrer la propriété d'interpolation en utilisant la condition (θ_3). Soit ρ un caractère d'Artin de G. D'après (θ_3), $\rho = \sum_j n_j \operatorname{Ind}_{U_j}^G(\chi_j)$. Pour tout entier positif n divisible par $(p-1)$, on a :

$$\begin{aligned}
\zeta_\Sigma(F_\infty/F)(\rho\kappa_F^n) &= \prod_j \zeta_\Sigma(\operatorname{Ind}_{U_j}^G(\chi_j)\kappa_F^n)^{n_j} \\
&= \prod_j \zeta_\Sigma(\operatorname{Ind}_{U_j}^G(\chi_j\kappa^n_{F_\infty^{U_j}}))^{n_j} \\
&= \prod_j \zeta_\Sigma(F_\infty^{V_j}/F_\infty^{U_j})(\chi_j\kappa^n_{F_\infty^{U_j}})^{n_j} = L_\Sigma(\rho, 1-n)
\end{aligned}$$

Si l'on suppose que θ est injectif, l'unicité de $\zeta_\Sigma(F_\infty/F)$ résulte immédiatement de l'unicité des $\zeta_\Sigma(F_\infty^{V_j}/F_\infty^{U_j})$. $\square$

Au plan technique, le choix de la famille I dépend de propriétés plus ou moins maniables du groupe G, et la construction de Φ, Φ_S s'appuie sur des congruences entre les pseudo-mesures abéliennes $\zeta_\Sigma(F_\infty^V/F_\infty^U)$. C'est en suivant cette stratégie que les premiers cas particuliers de la CPE ont été démontrés par [**Kat06**], [**Kak11**], [**Har10**] ... Voir aussi Ritter-Weiss dans un autre langage ([**RW08a**],[**RW08b**]).

3.2. Critères de réduction pour la CPE'. — La démarche de [**Kak10**] consiste, dans une première étape algébrique, à réduire la démonstration de la CPE' au cas où G est de dimension 1 et à choisir des sous-quotients abéliens le plus maniables possibles.

La réduction à la dimension 1 est due à Burns ([**Bur10**]). Nous exposons ici la preuve de [**Kak10**], thm. 21 :

Proposition 3.2. — *La CPE' est vérifiée par F_∞/F si et seulement si elle est vérifiée par toutes les sous-extensions F_∞^U/F correspondant à tous les sous-groupes ouverts U de H qui sont normaux dans G.*

Démonstration. — Le passage de la CPE' pour F_∞/F à la CPE' pour F_∞^U/F est clair. Inversement, considérons le diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
K_1'(\Lambda(G)) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\wr"] & K_1'(\Lambda(G)_S) \arrow[r, "\partial_S"] \arrow[d] & K_0(\Lambda(G),\Lambda(G)_S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\varprojlim_{\overline{G}} K_1'(\Lambda(\overline{G})) \arrow[r, "\bar\lambda"] & \varprojlim K_1'(\Lambda(\overline{G})_S) \arrow[r] & \varprojlim K_0(\Lambda(\overline{G}),\Lambda(\overline{G})_S) &
\end{tikzcd},$$

où $\overline{G}$ parcourt les quotients G/U tel que U soit un sous-groupe ouvert de H et soit normal dans G. Un résultat algébrique de Fukaya-Kato ([**FK06**], proposition 1.5.1) permet de montrer que $K_1'(\Lambda(G)) \simeq \varprojlim K_1'(\Lambda(\overline{G}))$. Si la CPE' est vérifiée pour tous les quotients $\overline{G}$, on peut trouver, pour tout $\overline{G}$, une unique pseudo-mesure $\zeta_{\overline{G}} \in K_1'(\Lambda(\overline{G})_S)$ vérifiant les propriétés requises. Soit $f \in K_1'(\Lambda(G)_S)$ un élément caractéristique de $[C(F_\infty/F)]$, i.e. vérifiant $\partial_S(f) = -[C(F_\infty/F)]$. Pour tout $\overline{G}$, soit $f_{\overline{G}}$ l'image de f dans $K_1'(\Lambda(\overline{G})_S)$, et posons $u_{\overline{G}} = \zeta_{\overline{G}} f_{\overline{G}}^{-1}$. Les $f_{\overline{G}}$ (resp. les $\zeta_{\overline{G}}$) forment un système projectif par construction (resp. par la propriété d'unicité de la CPE'), donc $(u_{\overline{G}})_{\overline{G}} \in \varprojlim K_1'(\Lambda(G)_S)$, et en fait $(u_{\overline{G}})_{\overline{G}} \in \bar\lambda(\varprojlim K_1'(\Lambda(\overline{G}))$ par construction. Par suite il existe $u \in \lambda(K_1'(\Lambda(G)))$ qui s'envoie sur $u_{\overline{G}}$ pour tout $\overline{G}$. Montrons que $\zeta_\Sigma = uf$ est la pseudo-mesure cherchée. Il est clair que $\partial(\zeta_\Sigma) = -[C(F_\infty/F)]$. Pour vérifier la propriété d'interpolation, soit ρ une représentation d'Artin de G, qui se factorise forcément à travers un certain $\overline{G}$. Comme ζ_Σ s'envoie sur $\zeta_{\overline{G}}$ par passage au quotient (à cause de l'unicité de $\zeta_{\overline{G}}$), on a, pour tout entier positif n divisible par $(p-1)$:

$$\zeta_\Sigma(\rho\kappa_F^n) = \zeta_{\overline{G}}(\rho\kappa_F^n) = L_\Sigma(\rho, 1-n)$$

□

La proposition 3.2 permet de se ramener au cas où G est de dimension 1, i.e. $G \simeq H \rtimes \Gamma$, avec H fini.
Le second critère de réduction de [**Kak10**] va permettre de se ramener au cas « hyper-élémentaire ».

Définition 3.3. — Soit ℓ un nombre premier. Un groupe fini P est appelé ℓ-hyper-élémentaire si $P \simeq C_m \rtimes P_1$, où C_m est le groupe cyclique d'ordre m et P_1 est un ℓ-groupe fini, avec $\ell \nmid m$. Un groupe fini est appelé hyper-élémentaire s'il est ℓ-hyper-élémentaire pour un certain ℓ.

Un théorème de Dress-Wall dit que, pour tout groupe fini $\mathcal{G}$, on a un isomorphisme $K_1'(\mathcal{O}[\mathcal{G}]) \simeq \varprojlim K_1'(\mathcal{O}[P])$, où P parcourt les sous-groupes hyper-élémentaires de $\mathcal{G}$ et la $\varprojlim$ est prise par rapport aux applications de norme et aux applications induites par la conjugaison ([**Kak10**], thm. 23).
Considérons maintenant un groupe de Lie p-adique compact G de dimension 1, i.e. $G \simeq H \rtimes \Gamma$, avec H fini. Fixons un sous-groupe Γ^{p^e} de Γ tel que $\Gamma^{p^{e-1}}$ opère trivialement sur H. Pour tout sous-groupe hyper-élémentaire P de G/Γ^{p^e}, notons U_P l'image réciproque de P dans G.

Proposition 3.4. — *La CPE' est vérifiée par une extension admissible F_∞/F de dimension de Lie égale à 1 si et seulement si elle est vérifiée par toute sous-extension $F_\infty/F_\infty^{U_P}$, où P parcourt les sous-groupes hyper-élémentaires de G/Γ^{p^e}.*

Démonstration. — analogue à celle de la proposition 3.2. $\square$

Les propositions 3.2 et 3.4 permettent de ramener la démonstration de la CPE' au cas où le groupe de Galois de l'extension admissible est du type U_P, i.e. c'est un groupe de Lie p-adique de dimension 1, possédant un sous-groupe central ouvert isomorphe à $(\mathbb{Z}_p,+)$, et tel que le quotient est hyper-élémentaire.

3.3. Le cas ℓ-hyper-élémentaire, $\ell \neq p$. — Dans ce cas, la stratégie de Burns-Kato va s'appliquer sans difficulté majeure. Pour simplifier les notations, appelons G un groupe de type U_P, $\Gamma \simeq (\mathbb{Z}_p,+)$ son sous-groupe central privilégié, $\overline{G} = G/\Gamma$ le quotient ℓ-hyper-élémentaire.

Lemme 3.5. — *G est de la forme $\Gamma \times \overline{G}$, avec $\overline{G}$ ℓ-hyper-élémentaire (voir* [**Kak10**]*, lemma 24).*

On peut écrire $\overline{G}$ sous la forme $C_m \rtimes Q$, où C_m est un groupe cyclique d'ordre m premier à ℓ et Q est un ℓ-groupe.

Exercice 4. — si $p \nmid m$, adapter la démonstration du théorème 2.8 du §2.7 pour montrer que la CPE' est vraie.

On suppose désormais que $\overline{G} \simeq C_{p^r} \rtimes Q$, où p ne divise pas l'ordre de Q. Pour tout $s \leq r$, soit Q_s le centralisateur dans $\overline{G}$ du sous-groupe C_{p^s} de C_{p^r}, et soit U_s l'image réciproque de Q_s dans G. Pour $s \leq t \leq r$, posons :

$\overline{U}_s = \Gamma \times H_0(Q_s, C_{p^r}) \times Q_s$, $\overline{U}_{s,t} = \Gamma \times H_0(Q_s, C_{p^r}) \times Q_t$

$\theta_s \colon K_1'(\Lambda(G)) \overset{\text{norme}}{\longrightarrow} K_1'(\Lambda(U_s)) \overset{\text{nat}}{\longrightarrow} K_1'(\Lambda(\overline{U}_s))$

$\theta_{s,S} \colon K_1'(\Lambda(G)_S) \overset{\text{norme}}{\longrightarrow} K_1'(\Lambda(U_s)_S) \overset{\text{nat}}{\longrightarrow} K_1'(\Lambda(\overline{U}_s)_S)$

$\theta \colon K_1'(\Lambda(G)) \longrightarrow \prod_{s\leq r} K_1'(\Lambda(\overline{U}_s))$

$\theta_S \colon K_1'(\Lambda(G)_S) \longrightarrow \prod_{s\leq r} K_1'(\Lambda(\overline{U}_s)_S)$

Pour $s \leq t \leq r$ on a des morphismes naturels

$$N_{s,t} \colon K_1'(\Lambda(\overline{U}_s)) \longrightarrow K_1'(\Lambda(\overline{U}_{s,t}))$$

et

$$\pi_{s,t} \colon K_1'(\Lambda(\overline{U}_t)) \longrightarrow K_1'(\Lambda(\overline{U}_{s,t})).$$

Idem en localisant en S.

Définition 3.6. —
Soit Φ (resp. Φ_S) l'ensemble des $(x_s) \in \prod_{s\leq r} K_1'(\Lambda(\overline{U}_s))$ (resp. $\prod_{s\leq r} K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(\overline{U}_s))$) tels que

1. Pour tous $s \leq t \leq r$, $N_{s,t}(x_s) = \pi_{s,t}(x_t)$
2. (x_s) est fixé par la conjugaison par Q.

On peut alors montrer par un calcul direct (i.e. sans introduire de concept nouveau) la

Proposition 3.7 (**[Kak10], propos. 30**). —

$$\theta\colon K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)) \xrightarrow{\sim} \Phi;\ \operatorname{Im}\theta_S \subset \Phi_S;\ \operatorname{Im}\theta_S \cap \prod_{s\leq r} K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(\overline{U}_S)) = \operatorname{Im}\theta$$

NB : l'hypothèse que $p \nmid (G : U_{s+1})$ joue un rôle dans ce calcul.
Quant à la condition (θ_3) elle est immédiate : pour toute représentation d'Artin irréductible ρ de G, il existe $s \leq r$ et une représentation ρ_s de U_s telle que $\rho = \operatorname{Ind}_{U_s}^G \rho_s$. On en déduit, par un raisonnement analogue à celui de la proposition 2 du §3.2, le

Théorème 3.8. — *Soit F_∞/F une extension admissible vérifiant $\mu = 0$. Supposons que $G =$* Gal(F_∞/F) *est de dimension 1 et que G/Γ^{p^e} est ℓ-hyper-élémentaire, $\ell \neq p$ (l'exposant e est défini juste avant la proposition 3.4). Alors F_∞/F vérifie la CPE'.*

3.4. Le cas p-hyper-élémentaire. — réduction au cas pro-p.
Sans surprise, ce cas est de loin le plus difficile. Soit donc $\overline{G} = G/\Gamma^{p^e}$, où P est un p-groupe et $p \nmid m$. Le groupe $\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_m)/\mathbb{Q}_p)$ agit sur l'ensemble $\widehat{C}_m$ des caractères (de dimension 1) de C_m ; soit C l'ensemble des orbites de cette action ; par abus de langage, on notera aussi C un système de représentants de C. L'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_p[C_m]$ se décompose comme somme directe $\oplus_{\chi\in C}\mathcal{O}_\chi$, où chaque $\mathcal{O}_\chi$ est l'anneau des entiers d'une extension finie L_χ de $\mathbb{Q}_p$. L'action de P sur C_m induit une action sur chaque $\mathcal{O}_\chi$ via l'homomorphisme $P \longrightarrow \operatorname{Gal}(L_\chi/\mathbb{Q}_p)$. On notera $U = U_P =$ l'image réciproque de P dans G. Alors $G \simeq C_m \rtimes U$, et l'on note t_χ l'homomorphisme composé $U \longrightarrow P \longrightarrow \operatorname{Gal}(L_\chi/\mathbb{Q}_p)$, $U_\chi = \operatorname{Ker}(t_\chi)$.

Lemme 3.9. —

$$K_1'(\Lambda(G)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\chi K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}_\chi}(U_\chi))^{U/U_\chi}$$

Démonstration. — Pour tout $n \geq 0$, posons $\overline{G}_n = G/\Gamma p^{e+n}$ et

$$U_{\chi,n} = \operatorname{Ker}\left(U/\Gamma^{p^{e+n}} \longrightarrow P \longrightarrow \operatorname{Gal}(L_\chi/\mathbb{Q}_p)\right) .$$

Un résultat d'Oliver (**[Oli88]**, thm. 12.2) dit que

$$K_1'(\mathbb{Z}_p[\overline{G}_n]) \xrightarrow{\sim} \oplus_\chi K_1'(\mathcal{O}_\chi[U_{\chi,n}])^{U/U_{\chi,n}},$$

et un résultat de Fukaya-Kato déjà cité (**[FK06]**, proposition 1.5.1) permet de passer à la limite projective. □

Un raisonnement analogue à celui de la proposition 2 du §3.2 donne la

Proposition 3.10. — *Soit F_∞/F une extension admissible telle que $\overline{G} = G/\Gamma^{p^e}$ soit p-hyper-élémentaire, disons $\overline{G} \simeq C_m \rtimes P, p \nmid m$. Alors la CPE' est vérifiée par F_∞/F si et seulement si elle est vérifiée par toute extension $F_\infty^{\operatorname{Ker}\chi}/F_\infty^{C_m\rtimes U_\chi}$ quand χ parcourt $\widehat{C}_m$.*

Ce résultat permet de réduire la démonstration de la CPE' au cas où $G = \Delta \times G_p$, où Δ est un groupe cyclique fini d'ordre premier à p et G_p est un pro-p-groupe de Lie compact de dimension 1. Le reste de la preuve va se diviser en deux parties, l'une algébrique, l'autre arithmétique.

3.5. Description algébrique du K_1'. — Rappelons les hypothèses : G est un pro-p-groupe de Lie p-adique de dimension 1, de la forme $G \simeq H \rtimes \Gamma$, H fini. On fixe un sous-groupe Γ^{p^e} de Γ qui agit trivialement sur H, et $\overline{G} = G/\Gamma^{p^e}$. Suivant la stratégie de Burns-Kato, on va construire les homomorphisme θ et θ_S et déterminer leurs images.

3.5.1. Conditions multiplicatives. — Introduisons d'abord quelques notations supplémentaires. $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers d'une extension finie *non ramifiée* de $\mathbb{Q}_p$. Pour tout sous-groupe P de $\overline{G}$, U_P est l'image réciproque de P dans G, $N_{\overline{G}}$ le normalisateur de P dans $\overline{G}$, $W_{\overline{G}}P$ le groupe de Weyl $N_{\overline{G}}P/P$. Enfin, $C(\overline{G})$ est l'ensemble des sous-groupes cycliques de $\overline{G}$.

Définition 3.11. —

1. $\forall P \in C(\overline{G}), P \neq (1)$, fixons un caractère ω_P de P d'ordre p. Posons $\omega_{\{1\}} = \omega_1 =$ un caractère non trivial de Γ^{p^e} dont la restriction à $\Gamma^{p^{e+1}}$ est triviale Alors $\forall P \in C(\overline{G})$, ω_P induit une application de $\Lambda_{\mathcal{O}}(U_P)^\times$ (resp. $\Lambda_{\mathcal{O}}(U_P)_S^\times$) dans lui-même, encore notée ω_P, définie par $g \in U_P \mapsto \omega_P(g)g$.
2. $\forall P \in C(\overline{G})$, $P \neq (1)$, définissons une application α_P de $\Lambda_{\mathcal{O}}(U_P)^\times$ (resp. $\Lambda_{\mathcal{O}}(\Gamma^{p^e})_S^\times$) dans lui-même par $x \mapsto x^p/\prod_{k=0}^{p-1}\omega_P^k(x)$. Pour $P = (1)$, définissons $\alpha_{\{1\}} = \alpha_1$ par $x \mapsto x^p/\varphi(x)$, où φ est le Frobenius en p. Si $P \leq \overline{G}$ n'est pas cyclique, posons simplement $\alpha_P(x) = x^p$. Enfin, notons $\alpha = (\alpha_P)_{P \leq \overline{G}}$.
3. Pour $P \leq P' \leq \overline{G}$ tels que $[P', P'] \leq P$, notons $\mathrm{tr}_{P,P'} \colon \Lambda_{\mathcal{O}}(U_{P'}^{\mathrm{ab}}) \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P/[U_{P'}, U_{P'}])$ la trace, $\mathrm{nr}_{P,P'} \colon \Lambda_{\mathcal{O}}(U_{P'}^{\mathrm{ab}})^\times \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P/[U_{P'}, U_{P'}])^\times$ la norme, $\pi_{P,P'} \colon \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P^{\mathrm{ab}}) \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P/[U_{P'}, U_{P'}])$ la surjection naturelle. Idem pour les mêmes objets localisés en S.
4. Pour tout $P \in C(\overline{G})$, notons T_P (resp $T_{P,S}$) l'image de l'application de $\Lambda_{\mathcal{O}}(U_P)$ (resp. $\Lambda_{\mathcal{O}}(U_P)_S$) dans lui-même définie par $x \mapsto \sum_{g \in W_{\overline{G}}P} gxg^{-1}$.

Les homomorphismes θ et θ_S dans la stratégie de Burns-Kato seront définis par :

$$\theta_P \colon K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)) \xrightarrow{\text{norme}} K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(U_P)) \xrightarrow{\text{nat}} K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(U_P^{\mathrm{ab}})) = \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P^{\mathrm{ab}})^\times$$

$$\theta = (\theta_P) \colon K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)) \longrightarrow \prod_{P \leq G} \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P^{\mathrm{ab}})^\times$$

Idem pour $\theta_{P,S}$ et θ_S. Pour décrire les images de θ et θ_S, introduisons :
$\Phi =$ le sous-groupe de $\prod_{P \leq G} \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P^{\mathrm{ab}})^\times$ formé des (x_P) vérifiant les propriétés suivantes :
(M1) Pour tous $P \leq P' \leq \overline{G}$ tels que $[P', P'] \leq P$, $\mathrm{nr}_{P,P'}(x_{P'}) = \pi_{P,P'}(x_P)$.
(M2) (x_P) est fixé par la conjugaison par tout $g \in \overline{G}$.
(M3) Pour tout $P \leq \overline{G}$, $x_P^{|P|} \equiv x_1 (\mathrm{mod}\ p)$.

(M4) Pour tout $P \in C(\overline{G})$ et $P \neq (1)$, $\alpha_P(x_P) \equiv \prod_{P'} \varphi(\alpha_{P'}(x_{P'}))(\mathrm{mod}\ pT_p)$, le produit $\prod_{P'}$ portant sur tous les $P' \in C(\overline{G})$ tels que $P'^p = P \neq P'$. Pour $P = (1)$, on a $x_{\{1\}}^p \equiv \varphi(x_{\{1\}}) \prod_{P'} \varphi(\alpha_{P'}(x_{P'}))(\mathrm{mod}\ pT_{\{1\}})$, le produit $\prod_{P'}$ portant sur tous les $P' \in C(\overline{G})$ tels que $P'^p = (1) \neq P'$

Définitions analogue pour Φ_S.

Les résultats algébriques fondamentaux de Kakde ([**Kak10**], thm. 49 et 50) sont résumés dans le

Théorème 3.12. —

1. *θ réalise un isomorphisme $K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)) \xrightarrow{\sim} \Phi$;*
2. *$\mathrm{Im}\,\theta_S \subset \Phi_S$;*
3. *$\Phi_S \cap \prod_{P \leq G} \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P^{ab})^\times = \mathrm{Im}\,\theta$*

La preuve sera donnée à la fin de cette section.

3.5.2. Conditions additives. — Un argument-clé dans la démonstration est de rendre les conditions multiplicatives *(Mj)* plus maniables en les transformant en conditions « additives » *(Aj)* via une application « logarithmique ». Ritter-Weiss ([**RW06**]) ont eu l'idée d'étendre au cadre de la théorie d'Iwasawa le « logarithme entier » défini par Oliver-Taylor (voir [**Oli88**]) pour le K_1 des algèbres de groupes finis. Une telle extension nécessite de travailler dans les pro-p-complétés des algèbres d'Iwasawa localisées, mais dans la suite, on passera sur cet aspect technique (puisqu'on ne donnera pas de démonstration complète). Dans notre cas, le lien entre algèbres de groupes finis et algèbres d'Iwasawa est fourni par le

***Lemme 3.13* (voir e.g. [Kak10], 5.1.2)**. — *$\Lambda_{\mathcal{O}}[G] = R[\overline{G}]^\tau$, où $R = \Lambda_{\mathcal{O}}(\Gamma^{p^e})$ et τ est le « twist » induit par le 2-cocycle*

$$\tau\colon \overline{G} \times \overline{G} \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{O}}(\Gamma^{p^e})^\times \qquad (h_1\gamma^{a_1}, h_2\gamma^{a_2}) \mapsto \gamma^{\left[\frac{a_1+a_2}{p^e}\right]p^e}$$

([·] désigne la partie entière).

Continuons à noter $R = \Lambda_{\mathcal{O}}(\Gamma^{p^e})$ et désignons par $\mathrm{Conj}(\overline{G})$ l'ensemble des classes de conjugaison de $\overline{G}$. Il est facile de voir qu'on a un isomorphisme de R-modules $R[\overline{G}]^\tau/[R[\overline{G}]^\tau, R[\overline{G}]^\tau] \xrightarrow{\sim} R[\mathrm{Conj}(\overline{G})]^\tau$.

***Lemme 3.14* (voir e.g. [Kak10], proposition 61)**. — *Le logarithme p-adique $\mathrm{Log}(1+x)$, pour tout x appartenant au radical de Jacobson de $R[\overline{G}]^\tau$, induit un unique homomorphisme $\log\colon K_1(R[\overline{G}]^\tau) \longrightarrow R[\mathrm{Conj}(\overline{G})]^\tau \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$*

On peut maintenant définir le logarithme entier inspiré de celui d'Oliver-Taylor :

Définition 3.15. — Soit φ l'application sur R définie par le Frobenius en p sur $\mathcal{O}$ et l'élévation à la puissance p-ième sur Γ^{p^e}. On étend φ (en conservant la même notation) à $R[\mathrm{Conj}(\overline{G})]^\tau$ en envoyant la classe de $\overline{g}$ sur celle de $\overline{g}^p$ (attention : $\overline{g}^p \neq \bar{g}^p$ en général). Pour tout $x \in K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(G))$, on pose $L(x) = \log(x) - \frac{\varphi}{p}\log(x)$. On vérifie que L est un homomorphisme de $K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(G))$ dans $R[\mathrm{Conj}(\overline{G})]^{\tau}$, appelé logarithme entier (c'est manifestement une généralisation non commutative de l'homomorphisme classique de Coates-Wiles).

Proposition 3.16. — *Soit $\mu(\mathcal{O})$ la torsion de $\mathcal{O}^{\times}$. On a une suite exacte de $\Lambda_{\mathcal{O}}(\Gamma^{p^e})$-modules :*

$$1 \longrightarrow \mu(\mathcal{O}) \times G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)) \xrightarrow{L} \Lambda_{\mathcal{O}}(\Gamma^{p^e})[\mathrm{Conj}(\overline{G})]^{\tau} \longrightarrow G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow 1$$

Démonstration. — voir [**Kak10**], lemmes 66 et 67. □

Introduisons maintenant les analogues additives des conditions *(Mj)*.

Définition 3.17. —

1. Pour tout $P \leq \overline{G}$, le groupe de Weyl $W_{\overline{G}}P$ agit R-linéairement sur $R[P^{\mathrm{ab}}]^{\tau}$ par conjugaison sur P (rappelons que $R = \Lambda_{\mathcal{O}}(\Gamma^{p^e})$). Définissons $t_P \colon R[\mathrm{Conj}(\overline{G})]^{\tau} \longrightarrow R[P^{\mathrm{ab}}]^{\tau}$ par $\overline{g} \mapsto \sum_{x \in C(\overline{G},P)} \{\overline{x}^{-1} g \overline{x} | \overline{x}^{-1} g \overline{x} \in P\}$, où $C(\overline{G}, P)$ est un système de représentants de P dans $\overline{G}$. C'est une application R-linéaire bien définie, indépendante du choix de $C(\overline{G}, P)$.
2. Pour tout $P \in C(\overline{G})$, définissons $\eta_P \colon R[P]^{\tau} \longrightarrow R[P]^{\tau}$ par $\eta_P(h) = h$ si h est un générateur de P, 0 sinon. (En d'autres termes, $\eta_P(x) = x - \frac{1}{p}\sum_0^{p-1} \omega_P^k(x)$). Posons $\beta_P = \eta_P \circ t_P$ si $P \in C(\overline{G})$, t_P si $P \leq \overline{G}$, non cyclique ; puis $\beta = \beta_R = (\beta_P)_{P \leq \overline{G}} \colon R[\mathrm{Conj}(\overline{G})]^{\tau} \longrightarrow \prod_{P \leq \overline{G}} R[P]^{\tau}$.
3. Pour tout $P \in C(\overline{G})$, soit $T_{P,R}$ l'image de l'application $\mathrm{tr} \colon R[P]^{\tau} \longrightarrow R[P]^{\tau}$, $x \mapsto \sum_{g \in W_{\overline{G}}P} \overline{gxg^{-1}}$. C'est un idéal de l'anneau $(R[P]^{\tau})^{W_{\overline{G}}P}$, qui coïncide avec l'idéal T_P de la définition 3.11 (4).

Avec ces définitions, on peut introduire l'analogue additif Ψ de Φ. C'est le sous-groupe de $\prod_{P \leq \overline{G}} R[P^{\mathrm{ab}}]^{\tau}$ formé des (a_P) tels que :
(A1) Soit $P \leq P' \leq \overline{G}$ tel que $[P' : P] \leq P$. Si P n'est pas cyclique, $\mathrm{tr}_{P,P'}(a_{P'}) = \pi_{P,P'}(a_P)$ (on rappelle que la trace $\mathrm{tr}_{P,P'}$ a été introduite dans la définition 3.11 (3)). Si P est cyclique et P' non cyclique, $\eta_P(\mathrm{tr}_{P,P'}(a_{P'}) = \pi_{P,P'}(a_P)$. Si P' est cyclique et si $P' \neq P$, $\mathrm{tr}_{P,P'}(a_{P'}) = 0$.
(A2) $(a_P)_{P \in C(\overline{G})}$ est invariant par la conjugaison pour tout $g \in \overline{G}$.
(A3) Pour tout $P \in C(\overline{G})$, $a_P \in T_{P,R}$

La meilleure maniabilité des conditions « additives » *(Aj)* permet de démontrer par des calculs directs (de type combinatoire) la

Proposition 3.18 **([Kak10], thm. 53)**. — *$\beta = \beta_R$ induit un isomorphisme de R-modules $R[\mathrm{Conj}(\overline{G})]^{\tau} \xrightarrow{\sim} \Psi$.*

On peut maintenant comparer les homomorphismes θ et β :

Proposition 3.19. — *On a un diagramme commutatif aux lignes exactes :*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mu(\mathcal{O})\times G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\theta"'] & R[\mathrm{Conj}(\overline{G})]^{\tau} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"', "\wr"] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mu(\mathcal{O})\times G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & \Phi \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \Psi \arrow[r, "\lambda"] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Idée de la preuve : Il suffit de définir les flèches λ et $\mathcal{L}$. L'existence de λ découle immédiatement de l'isomorphie de β. Définissons ensuite $u_P\colon \prod_{C\leq\overline{G}}\Lambda_{\mathcal{O}}(U_C^{\mathrm{ab}})^{\times}\longrightarrow \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P^{\mathrm{ab}})^{\times}$ par $u_P((x_C))=\prod_{P'}\varphi(x_{P'})^{|P'|}$ si $P\notin C(\overline{G})$, le produit portant sur tous les $P'\in C(\overline{G})$) tels que $P'^p\leq P$; par $u_P((x_C))=\prod_{P'}\varphi(x_{P'})$ si $P\in C(\overline{G})$, le produit $\prod_{P'}$ portant sur tous les $P'\in C(\overline{G})$ tels que $P'^p=P\neq P'$. Le produit vide est 1 par convention. Posons $u=(u_P)_P$ et définissons $\mathcal{L}_P$ par :

$$\mathcal{L}_P((x_C))=\begin{cases}\dfrac{1}{p^2|P|}\log\left(\dfrac{\alpha_P(x_P)^{p|P|}}{u_P(\alpha((x_C)))}\right) & \text{si } P\notin C(\overline{G}))\\ \dfrac{1}{p}\log\left(\dfrac{\alpha_P(x_P)}{u_P(\alpha((x_C)))}\right) & \text{si } P\in C(\overline{G}))\text{ et } P\neq(1)\\ \dfrac{1}{p}\log\left(\dfrac{\alpha_{\{1\}}(x_{\{1\}})}{\varphi(x_{\{1\}})u_{\{1\}}((x_C))}\right) & \text{si } P=(1)\end{cases}$$

(le point technique est de pouvoir donner un sens à $\log(\cdot)$). La proposition 3.19 se démontre alors en faisant à la main tous les calculs requis. □

Nous sommes enfin en mesure de démontrer le théorème algébrique principal de [**Kak10**].
Preuve du théorème 3.12 :
(1) L'isomorphie de θ se montre en appliquant le lemme des 5 au diagramme de la proposition 3.19
(2) Soit $\widehat{\Phi}_S$ le pro-p-complété de Φ_S. On montre comme dans la proposition 3.19 que $\operatorname{Im}\widehat{\theta}_S\subseteq\widehat{\Phi}_S$, d'où, puisque $\widehat{\Phi}_S\cap\prod_{P\leq\overline{G}}\Lambda_{\mathcal{O}}(U_P)_S^{\times}=\Phi_S$, l'inclusion $\operatorname{Im}\theta_S\subseteq\Phi_S$.
(3) $\Phi_S\cap\prod_{P\leq\overline{G}}\Lambda_{\mathcal{O}}(U_P^{\mathrm{ab}})^{\times}=\Phi$, d'où l'égalité avec $\operatorname{Im}\theta$ d'après (1). □

Remarque 3.20. — Dans le théorème 3.12 précédent, ainsi que dans la proposition 3.7 du §3.3, l'isomorphie de θ entraîne que $K_1'(\Lambda(G))$ s'injecte dans $K_1'(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)_S)$, ce qui n'était pas visible a priori.

3.6. Congruences arithmétiques. — Suivant la stratégie de Burns-Kato, il nous reste maintenant (voir la proposition 3.1 du §3.1) à montrer que Φ_S contient les éléments zêta p-adiques associés aux extensions admissibles abéliennes que nous avons introduites. Rappelons les hypothèses : $G=\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est un pro-p-groupe de Lie p-adique de dimension 1, $G\simeq H\rtimes\Gamma$; pour tout sous-groupe P de $\overline{G}=G/\Gamma^{p^e}$, U_P désigne l'image réciproque de P dans G, et l'on posera $F_P=F_\infty^{U_P}$, $K_P=F_\infty^{[U_P,U_P]}$. L'extension K_P/F_P est admissible abélienne, de groupe de Galois isomorphe à U_P^{ab}, et l'on notera $\zeta_P \in \Lambda(U_P^{\mathrm{ab}})_S^\times$ la pseudo-mesure de Deligne-Ribet associée.

3.6.1. Propriétés arithmétiques des ζ_P. — La propriété d'induction ($\theta 3$) étant évidente pour la famille $I = \{P \leq \overline{G}\}$ (voir la proposition 3.7 du §3.3), le théorème 3.12 du §3.5 permet immédiatement de ramener la démonstration de la CPE' à celle du

Théorème 3.21. — *L'élément $(\zeta_P)_{P\leq\overline{G}} \in \prod_{P\leq\overline{G}} \Lambda_{\mathcal{O}}(U_P^{\mathrm{ab}})_S^\times$ vérifie les propriétés suivantes :*
(Z1) Pour tous $P \leq P' \leq \overline{G}$ tel que $[P', P'] \leq P$, $\mathrm{nr}_{P,P'}(\zeta_{P'}) = \pi_{P,P'}(\zeta_P)$
(Z2) $(\zeta_P)_{P\leq\overline{G}}$ est fixé par la conjugaison pour tout $g \in G$.
(Z3) Pour tout $P \leq \overline{G}$, $\dfrac{\alpha_P(\zeta_P)}{\prod_{P'} \mathrm{ver}_{P,P'}(\alpha_{P'}(\zeta_{P'}))} \equiv 1 \pmod{pT_{p,S}}$, le produit $\prod_{P'}$ étant pris sur tous les $P' \in C(\overline{G})$ tels que $P'^p = P$ et $P' \neq P$.

La vérification des conditions *(Z1)* et *(Z2)* se fait par des calculs directs ([**Kak10**], proposition 89). La congruence *(Z3)* paraît d'une autre nature, car elle nécessite des méthodes modulaires – ce qui n'est pas étonnant au fond, puisque la construction de la pseudo-mesure de Deligne-Ribet est modulaire. En fait, Kakde démontre un certain nombre de congruences qui entraînent *(Z3)* et qui s'appuient toutes sur un même principe, baptisé par Ritter-Weiss « le principe du q-développement de Deligne-Ribet ». Nous nous contenterons d'expliquer ce principe, en faisant l'impasse sur tous les autres arguments modulaires.

3.6.2. Approximation des ζ_P. — L'idée de départ est d'approximer les pseudo-mesures ζ_P par des suites d'éléments dans certaines algèbres de groupes finis. Rappelons que $\kappa = \kappa_F$ désigne le caractère cyclotomique sur F. Soit f l'entier positif caractérisé par $\kappa^{p-1}(\Gamma^{p^e}) = 1 + p^f\mathbb{Z}_p$.

Définition 3.22. — Soit $T_{P,j}$ l'image de l'application $\mathrm{tr}_{P,f}$ de $\mathbb{Z}_p[U_P/\Gamma^{p^{e+j}}]/p^{f+j}$ dans lui-même déterminée par $x \mapsto \sum_{g\in W_{\overline{G}}P} gxg^{-1}$. On peut vérifier que l'isomorphisme $\Lambda(U_P) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_j \mathbb{Z}_p[U_P/\Gamma^{p^{e+j}}]/p^{f+j}$ envoie T_P sur $\varprojlim_j T_{P,j}$.

Voici le lien avec les fonctions L : pour $x \in U_P/\Gamma^{p^{e+j}}$, notant $\delta^{(x)}$ la fonction caractéristique de $x\Gamma^{p^{e+j}}$ dans U_P, on peut définir la fonction zêta partielle complexe $\zeta(\delta^{(x)}, s) = \sum_{\mathfrak{A}} \dfrac{\delta^{(x)}(g_{\mathfrak{A}})}{N(\mathfrak{A})^s}$ pour $\Re(s) > 1$, où $g_{\mathfrak{A}}$ est le symbole d'Artin de $\mathfrak{A}$ dans U_P et la somme porte sur tous les idéaux entiers $\mathfrak{A}$ de F_P étrangers à Σ. D'après Klingen-Siegel, $\zeta(\delta^{(x)}, s)$ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}$, sauf en $s = 1$ qui est un pôle simple. De plus $\zeta(\delta^{(x)}, 1-k) \in \mathbb{Q}$ pour tout entier k positif. Si ε est une fonction localement constante sur U_P à valeurs dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V, disons $\varepsilon \equiv \sum_{x\in U_P/\Gamma^{p^{e+j}}} \varepsilon(x)\delta^{(x)}$ pour $j >> 0$, on peut définir canoniquement une valeur spéciale

$$L(\varepsilon, 1-k) = \sum_{x\in U_P/\Gamma^{p^{e+j}}} \varepsilon(x)\zeta(\delta^{(x)}, 1-k) \in V$$

(si ε est un caractère d'Artin de dimension 1, ce n'est autre que la valeur spéciale de la fonction L classique associée à ε, privée des facteurs euleriens en Σ).

Si $V = \mathbb{Q}_p$, alors pour tout entier positif $k \equiv 0(p-1)$, pour tout $u \in U_P$, posons $\Delta_P^u(\varepsilon, 1-k) = L(\varepsilon, 1-k) - \kappa(u)L(\varepsilon_u, 1-k)$, où ε_u est la fonction localement constante définie par $\varepsilon_u(g) = \varepsilon(ug), \forall g \in U_P$.

***Proposition 3.23* (cp [RW11]).** — *Pour $j > 0$ et $k \equiv 0(p-1)$, la surjection naturelle $\Lambda(U_P) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[U_P/\Gamma^{p^{e+j}}]/p^{f+j}$ envoie $(1-u)\zeta_P \in \Lambda(U_P)$ sur $\sum_{x \in U_P/\Gamma^{p^{e+j}}} \Delta_P^u(\delta^{(x)}, 1-k)\kappa(x)^{-k}x \pmod{p^{f+j}}$*

(la démonstration utilise la relation $(1-u)\zeta_P(\kappa^k\varepsilon) = \Delta_P^u(\varepsilon, 1-k)$; voir **[DR80]**, après le théorème 0.5).

3.6.3. Le principe du q-développement de Deligne-Ribet. — Dans le contexte de la proposition 3.23, Kakde démontre trois congruences sur les valeurs spéciales $\Delta_P^u(\delta^{(x)}, 1-k)$ (**[Kak10]**, propositions 104 à 106) qui entraînent la congruence *(Z3)* cherchée. Pour ces trois congruences, il utilise, comme dans **[RW11]**, un même principe que nous allons brièvement exposer. Toutes les notations non expliquées provenant de la théorie des formes modulaires de Hilbert peuvent être trouvées dans **[Kak10]**, §6.5.

***Proposition 3.24* ([DR80], proposition 6.1).** — *Soit L un corps de nombres totalement réel de degré r, soit L_Σ^{ab} son extension Σ-ramifiée abélienne maximale. Soit ε une fonction complexe localement constante sur $\mathrm{Gal}(L_\Sigma^{\mathrm{ab}}/L)$. Pour tout entier positif $k \equiv 0(p-1)$:*

1. *Il existe un idéal entier $\mathfrak{f}$ de L, à support dans Σ, et une forme modulaire de Hilbert $G_{k,\varepsilon} \in M_k(\Gamma_{00}(\mathfrak{f}), \mathbb{C})$ dont le q-développement standard s'écrit :*
$$2^{-r}L(\varepsilon, 1-k) + \sum_a \Big(\sum_{\mathfrak{A}} \varepsilon(g_{\mathfrak{A}})\kappa^{k-1}(\mathfrak{A})\Big)q_L^a \ ,$$
la première somme portant sur tous les éléments totalement positifs $a \in \mathcal{O}_L$, la seconde sur tous les idéaux $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{O}_L$ contenant a et premiers à Σ.
2. *En une pointe α définie par un idèle $\alpha \in \mathbb{A}_L^\times$, le q-développement de $G_{k,\varepsilon}$ a pour terme constant $\kappa^k((\alpha))2^{-r}L(\varepsilon_g, 1-k)$, où (α) est l'idéal de L engendré par α, g est l'image de (α) par l'application de réciprocité d'Artin, et ε_g est la fonction localement constante définie par $\varepsilon_g(h) = \varepsilon(gh)$.*

Le principe du q-développement de Deligne-Ribet est la

***Proposition 3.25* ([DR80], 0.3 et 5.13 à 5.15).** — *Soit $f \in M_k(\Gamma_{00}(\mathfrak{f}), \mathbb{Q})$. Supposons que le q-développement standard de f ait tous ses coefficients non constants dans $\mathbb{Z}_{(p)}$. Soit $\alpha \in \mathbb{A}_L^\times$ un idèle fini. Soit $c(0, \alpha)$ (resp. $c(0)$) le terme constant du q-développement de f en la pointe définie par α (resp. du q-développement standard). Alors $c(0) - \kappa^{-k}(\alpha_p)c(0, \alpha) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.*

Cas particulier : dans le contexte de la proposition 3.24, cette différence vaut $2^{-r}\Delta^{(u)}(\varepsilon, 1-k)$, où $u \in \mathrm{Gal}(L_\Sigma^{\mathrm{ab}}/L)$ est l'image de α par Artin.

Ceci termine la démonstration par Kakde de la CPE'.

3.7. Le point de vue de Ritter-Weiss. — Revenons aux notations du §2.4.3. Pour attaquer la CPE1' (i.e. la CPE1 sans l'assertion d'unicité), Ritter-Weiss démontrent d'abord plusieurs théorèmes de réduction :

1) Dans [**RW06**],[**RW05**], ils utilisent d'abord le logarithme à la Oliver-Taylor de $K_1(\widehat{\Lambda(G)}_\bullet)$ dans $T(\widehat{Q\Lambda(G)}) := \widehat{Q\Lambda(G)}/[\widehat{Q\Lambda(G)}, \widehat{Q\Lambda(G)}]$ (où le chapeau indique la pro-p-complétion) pour montrer qu'une extension admissible F_∞/F telle que $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est de dimension 1 et $\mu = 0$, vérifie la CPE1' si et seulement si $L_{F,\Sigma} \in \det(K_1(\widehat{\Lambda(G)}))$. Notons la disparition de la condition sur $\mho_\Sigma$, grâce au théorème de Wiles.

2) Disons que l'extension F_∞/F est *p-élémentaire* si $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est le produit direct d'un groupe cyclique d'ordre premier à p et d'un pro-p-groupe. Par des techniques d'induction, Ritter-Weiss montrent dans [**RW05**] que la vérification de la propriété $L_{F,\Sigma} \in \det(K_1(\widehat{\Lambda(G)}))$ pour toute extension admissible équivaut à sa vérification pour toute extension p-élémentaire.

3) À partir de maintenant, supposons que F_∞/F est p-élémentaire. La troisième réduction de Ritter-Weiss fait intervenir une interprétation logarithmique de la propriété de 2) ([**RW08c**], §3). Plus précisément, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_1(\widehat{\Lambda(G)}) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\mathrm{D\acute{e}t}"] & T(\widehat{Q\Lambda(G)}) \arrow[d, "\wr\ \text{Trace réduite}"] \\
\mathrm{HOM}(R_p(G), (\widehat{\Lambda(\Gamma) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p})^*) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \mathrm{Hom}^*(R_p(G), Q\Lambda(\Gamma) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p)
\end{tikzcd} ,$$

où HOM est un sous-groupe de Hom^* défini par des congruences qu'on ne rappellera pas (voir e.g. [**RW11**],§1). On ne rappellera pas non plus la définition de l'homomorphisme $\mathcal{L}$ qui fait commuter le diagramme. On peut vérifier que $L_{F,\Sigma}$ appartient au sous-groupe HOM, et donc définir une pseudo-mesure logarithmique $t_{F,\Sigma} \in T(\widehat{Q\Lambda(G)})$ telle que $\mathcal{L}(L_{F,\Sigma}) = t_{F,\Sigma}$. En utilisant le principe du q-développement, Ritter-Weiss montrent que $L_{F,\Sigma} \in \det(K_1(\widehat{\Lambda(G)}))$ si et seulement si $t_{F,\Sigma} \in T(\widehat{\Lambda(G)}) := \widehat{\Lambda(G)}/[\widehat{\Lambda(G)}, \widehat{\Lambda(G)}]$. C'est sous cette forme que la CPE1' est démontrée dans [**RW11**]. Deux points-clés résident dans des congruences dites « de Möbius-Wall » ([**RW11**], thm. 2 dont la preuve est combinatoire) et de « torsion » ([**RW11**], thm. 3, dont la preuve utilise le principe du q-développement)

NB : je ne sais pas si les congruences de [**Kak10**] et de [**RW11**] sont indépendantes ou pas.

Références

[Ble12] W. Bley – « La conjecture équivariante de Tamagawa », *Publ. Math. de Besançon* (2012), p. 27–53.

[Bur10] D. Burns – « On main conjectures in non-commutative Iwasawa theory and related conjectures », *preprint* (2010).

[CFK$^+$05] J. Coates, T. Fukaya, K. Kato, R. Sujatha & O. Venjakob – « The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2005), no. 101, p. 163–208.

[DR80] P. Deligne & K. A. Ribet – « Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields », *Invent. Math.* **59** (1980), no. 3, p. 227–286.

[FK06] T. Fukaya & K. Kato – « A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory », in *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII* (Providence, RI), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 219, Amer. Math. Soc., 2006, p. 1–85.

[Gre83] R. Greenberg – « On p-adic Artin L-functions », *Nagoya Math. J.* **89** (1983), p. 77–87.

[Gre12] C. Greither – « Introduction à la conjecture ETNC et applications », *Publ. Math. de Besançon* (2012), p. 55–73.

[Har10] T. Hara – « Iwasawa theory of totally real fields for certain non-commutative p-extensions », *J. Number Theory* **130** (2010), no. 4, p. 1068–1097.

[Kak10] M. Kakde – « The main conjecture of Iwasawa theory for totally real fields », *arXiv* (2010), no. 1008.0142v1.

[Kak11] ______, « Proof of the main conjecture of non-commutative Iwasawa theory for totally real number fields in certain cases », *J. Algebraic Geom.* **20** (2011), p. 631–683.

[Kat05] K. Kato – « K_1 of some non-commutative completed group rings », *K-Theory* **34** (2005), no. 2, p. 99–140.

[Kat06] ______, « Iwasawa theory of totally real fields for Galois extensions of Heisenberg type », *preprint* (2006).

[NQD84] T. Nguyen Quang Do – « Formations de classes et modules d'Iwasawa », in *Number theory, Noordwijkerhout 1983*, Lecture Notes in Math., vol. 1068, Springer, Berlin, 1984, p. 167–185.

[Oli88] R. Oliver – *Whitehead groups of finite groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 132, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[RW02a] J. Ritter & A. Weiss – « The lifted root number conjecture and Iwasawa theory », *Mem. Amer. Math. Soc.* **157** (2002), no. 748, p. viii+90.

[RW02b] ______, « Toward equivariant Iwasawa theory », *Manuscripta Math.* **109** (2002), no. 2, p. 131–146.

[RW04] ______, « Toward equivariant Iwasawa theory. II », *Indag. Math. (N.S.)* **15** (2004), no. 4, p. 549–572.

[RW05] ______, « Toward equivariant Iwasawa theory. IV », *Homology, Homotopy Appl.* **7** (2005), no. 3, p. 155–171.

[RW06] ______, « Toward equivariant Iwasawa theory. III », *Math. Ann.* **336** (2006), no. 1, p. 27–49.

[RW08a] ______, « Congruences between abelian pseudomeasures », *Math. Res. Lett.* **15** (2008), no. 4, p. 715–725.

[RW08b] ______, « Equivariant Iwasawa theory : an example », *Doc. Math.* **13** (2008), p. 117–129.

[RW08c] ______, « Non-abelian pseudomeasures and congruences between abelian Iwasawa L-functions », *Pure Appl. Math. Q.* **4** (2008), no. 4, Special Issue : In honor of Jean-Pierre Serre. Part 1, p. 1085–1106.

[RW11] ———, « On the "main conjecture" of equivariant Iwasawa theory », *J. Amer. Math. Soc.* **24** (2011), no. 4, p. 1015–1050.

[Ser78] J.-P. Serre – « Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **287** (1978), no. 4, p. A183–A188.

[Ser95] ———, « Groupes analytiques p-adiques (d'après Michel Lazard) [MR0176987 (31 #1255)] », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 8, Exp. No. 270*, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. 401–410.

[Was97] L. C. Washington – *Introduction to cyclotomic fields*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1997.

[Wil90] A. Wiles – « The Iwasawa conjecture for totally real fields », *Ann. of Math. (2)* **131** (1990), no. 3, p. 493–540.

22 janvier 2012

Thong Nguyen Quang Do, Laboratoire de Mathématiques, UMR 6623 de l'Université de Franche-Comté et du CNRS, 16 route de Gray, 25030 Besançon cedex, France • *E-mail :* thong.nguyen-quang-do@univ-fcomte.fr