THÉORIE DES NOMBRES
BESANÇON

Années 1998/2001

# Théorie d'Iwasawa des noyaux sauvages étales d'un corps de nombres

T. NGUYEN QUANG DO

# Théorie d'Iwasawa des noyaux sauvages étales d'un corps de nombres

Thong NGUYEN QUANG DO

**Abstract**

For a prime number $p$ and a number field $F$ which contains "sufficiently" (but of course finitely) many roots of unity, the higher étale wild kernels of $F$ are all canonically isomorphic.

## § 0 - Introduction :

Dans une note récente ([So] ; voir aussi [JS]), F. Soriano-Gafiuk a montré que pour un nombre premier $p$ et un corps de nombres $F$ contenant "suffisamment" de racines $p$-primaires de l'unité et vérifiant la conjecture de Gross, le $p$-Sylow du noyau sauvage $H_2F$ de $F$ est isomorphe au $p$-groupe des classes "logarithmiques" $\widetilde{Cl}(F)$ introduit par J.-F. Jaulent dans [J]. La démonstration de [So] utilise les méthodes logarithmiques de [J] et s'appuie essentiellement sur un isomorphisme canonique $H_2F/p \simeq \widetilde{Cl}(F)/p$ (en présence des racines $2p$-ièmes de l'unité). Or cet isomorphisme est une conséquence immédiate de la description cohomologique du $K_2$ ([T], 5-1) et du noyau sauvage ([Sc], 6.1) ce qui laisse à penser que les méthodes cohomologiques permettraient à peu de frais (mais, bien sûr, en perdant l'aspect algorithmique des méthodes logarithmiques) de retrouver, et même de renforcer et généraliser le résultat de [So]. C'est ce que l'on se propose de faire dans la présente note, en rappelant au passage le théorème d'isomorphisme de Schneider, qui ne nous semble pas assez connu.

*Notations* Dans toute la suite, $S = S(F)$ désignera l'ensemble des places de $F$ divisant $p$ et l'infini, et $G_S = G_S(F)$ sera le groupe de Galois sur $F$ de l'extension algébrique $S$-ramifiée (i.e. non ramifiée en dehors de $S$) maximale de $F$. Pour $j = 1, 2$ et pour $i \in \mathbb{Z}$, on considèrera les groupes de cohomologie galoisienne $H^j(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ et les groupes de cohomologie $p$-adique $H^j(G_S, \mathbb{Z}_p(i))$, où $(\cdot)(i)$ est le $i^{\text{ème}}$ "tordu" à la Tate ([T], § 3).

**Définition 0.1** *Avec des notations évidentes pour les groupes de cohomologie locaux, on pose* $III_S^{(i)}(F) := \ker\ (H^2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{\text{loc.}} \oplus_{v\in S} H^2(F_v,\ \mathbb{Z}_p(i)))$, *pour tout* $i \in \mathbb{Z}$.

La terminologie dans la littérature n'est pas très bien fixée pour ces noyaux de localisation (P. Schneider dans [Sc] se réfère seulement à "gewisse Galoiscohomologiegruppen"). Pour $i \geq 2$, $III_S^{(i)}(F)$ est usuellement appelé le $(2i-2)^{\text{ième}}$ *noyau sauvage étale* ([K], [N] etc ...). L'adjectif "étale" dissimule la référence au nombre premier $p$, mais l'adjectif "sauvage" est justifié par le fait que, pour $i = 2$, la conjecture de Quillen-Lichtenbaum (démontrée dans ce cas par Tate) entraîne que $III_S^2(F)$ est canoniquement isomorphe à la $p$-partie du noyau sauvage de $F$. Pour $i = 1$, le corps de classes permet de montrer sans difficulté que $III_S^{(1)}(F)$ est isomorphe au $p$-groupe $Cl_S(F)$ des $S$-classes de diviseurs de $F$. Pour tout $i \neq 1$, on a l'interprétation suivante en termes de modules d'Iwasawa :

**Définition 0.2** *Soit* $X = \varprojlim Cl_S(F(\mu_{p^n}))$ *où* $\mu_{p^n}$ *désigne le groupe des racines* $p^n$*-ièmes de l'unité.*

Par le corps de classes, $X$ est isomorphe au groupe de Galois sur $F(\mu_{p^\infty})$ de la pro-$p$-extension abélienne de $F(\mu_{p^\infty})$ qui est non-ramifiée, totalement décomposée aux places de $F(\mu_{p^\infty})$ au-dessus de $p$ (donc en toutes les places), maximale pour ces propriétés. Alors :

## § 1 - Co-descente :

Les noyaux de localisation précédents peuvent être décrits comme modules de co-descente

**Théorème 1.1** *([Sc], § 6, lemma 1) Supposons que* $F$ *contienne* $\mu_4$ *si* $p = 2$*. Alors pour tout* $i \in \mathbb{Z}, i \neq 1$*, nous avons un isomorphisme canonique*

$$III_S^{(i)}(F) \simeq X(i-1)_\Gamma, \text{ où } (\cdot)_\Gamma \text{ désigne les co-invariants par } \Gamma = \mathrm{Gal}\,(F(\mu_{p^\infty})/F).$$

*Idée de la preuve :* Par la dualité de Poitou-Tate, $III_S^{(i)}(F)$ est le dual de ker $(H^1(G_S(F), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) \xrightarrow{\text{loc.}} \oplus_{v \in S} H^1(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)))$. Les hypothèses ($F$ contient $\mu_4$ si $p = 2$, et $i \neq 1$) entraînent la trivialité cohomologique de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))$ pour l'action de $\Gamma$ (lemme de Tate), d'où $H^1(G_S(\Gamma), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) \simeq H^1(G_S(F(\mu_{p^\infty}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)))^\Gamma$ par inflation. On conclut par la théorie de Kummer. □

*Remarque :* À isomorphisme près, $X_\Gamma$ n'est autre que le $p$-groupe $\widetilde{\mathrm{Cl}}(F)$ des classes logarithmiques, dont la définition dans [J] est en fait la traduction "logarithmique" d'une suite exacte de Sinnott ([FGS], Appendix) en théorie du corps de classes (suite qui "remplace" l'isomorphisme du théorème 1.1 pour $i = 1$).

En tenant compte de la remarque suivant 0.1, on peut proposer la notation unifiée suivante : pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H_{2i}F := X(i)_\Gamma$.

Examinons d'abord les propriétés fonctorielles des noyaux $H_{2i}(.)$ dans la tour $F(\mu_{p^\infty})/F$.

**Corollaire 1.2** *Sous les hypothèses de 1.1, soit* $L/K$ *une extension finie, de groupe de Galois* $G$*, contenant* $F$ *et contenue dans* $F(\mu_{p^\infty})$*. Alors, pour tout* $i \in \mathbb{Z}$ *:*

a) *La co-descente naturelle (cohomologiquement, c'est la co-restriction) induit un isomorphisme* $(H_{2i}\,L)_G \simeq H_{2i}\,K$*.*

b) *L'extension naturelle (cohomologiquement, c'est la restriction) induit une surjection* $H_{2i}\,K \twoheadrightarrow \nu_G(H_{2i}\,L)$*, où* $\nu_G$ *est la norme algébrique de* $G$*.*

**Preuve :**

(Notons que sous nos hypothèses, l'extension $F(\mu_{p^\infty})/F$ est procyclique, donc $G$ est forcément cyclique)

a) Avec des notations évidentes, $H_{2i}\,K = X(i)_{\Gamma_K}$, $H_{2i}\,L = X(i)_{\Gamma_L}$ et $G = \Gamma_K/\Gamma_L$. La co-descente naturelle étant induite par l'identité de $X$, l'assertion a) est évidente.

b) L'extension naturelle est induite par la norme algébrique, c'est-à-dire qu'elle prend place dans le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} X(i)_{\Gamma_L} \arrow[rr, "\nu_G"] \arrow[dr, "cores"'] & & X(i)_{\Gamma_L} \\ & X(i)_{\Gamma_K} \arrow[ur, "res"'] & \end{tikzcd}$$

Comme la co-descente est surjective, l'image de l'extension est bien l'image de $\nu_G$. □

**Remarque :** En général, les propriétés de 1.2 ne restent pas valables en dehors de la tour $F(\mu_{p^\infty})/F$ (voir e.g. [KM]).

Quand $i$ varie dans $\mathbb{Z}$, les noyaux $H_{2i}\,F$ ne sont pas a priori liés. Cependant :

**Corollaire 1.3** *Pour tout entier $m$ tel que $F$ contient $\mu_{p^m}$ (resp. 4 si $p = 2$ et $m = 1$), pour tous $i$, $j \in \mathbb{Z}$, l'identité de $X$ induit un isomorphisme de modules galoisiens $H_{2i}\,F/p^m \simeq \left(H_{2j}\,F/p^m\right)(i-j)$.*

**Preuve** : Soit $\gamma$ un générateur topologique de $\Gamma$, et posons $\omega = \gamma - 1$. Par définition, $H_{2j}\,F = \left(X/\omega^{(j)}X\right)(j)$, où $\omega^{(j)}$ est caractérisé par la nouvelle action $\gamma^{(j)}(x) = \kappa(\gamma)^j\,\gamma(x)$, $\kappa$ étant le caractère cyclotomique. Si $F$ contient $\mu_{p^m}$, alors $\kappa(\gamma) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^m)$, et donc les idéaux $\left(\omega^{(i)}, p^m\right)$ et $\left(\omega^{(j)}, p^m\right)$ sont égaux dans l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$, d'où l'égalité des groupes - quotients $X/\left(\omega^{(i)}, p^m\right)X = X/\left(\omega^{(j)}, p^m\right)X$. □

Pour passer des quotients mod $p^m$ aux modules eux-mêmes, on a besoin de certaines conjectures classiques de la cohomologie galoisienne et de la théorie d'Iwasawa, qui apparaissent sous diverses formes e.g. dans [Sc], [N], etc ...

**Conjecture** $(C_i)$ *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H_{2i}F$ est fini.*

Il est connu que le cas $i = -1$ (resp. 0) correspond à la conjecture de Leopoldt (resp. Gross). Pour $i \geq 1$, la conjecture $(C_i)$ est vraie, à cause de la finitude du groupe $K_{2i}(\mathcal{O}_S)$ (voir [Sc], 6.6).

Pour tout $i \neq 0$, une formulation cohomologique de la conjecture $(C_i)$ (voir e.g. [Sc]) est que $H^2(G_S(F),\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i+1)) = 0$.

On retrouve (et généralise) facilement le résultat principal de Keune, qui peut être considéré comme une version "finie" de 1-2 a) :

**Corollaire 1.4** (cf. [Ke], thm 6.6)

*Supposons que $F$ vérifie $(C_i)$ et soit $r$ un entier assez grand pour que $p^r$ annule $H_{2i}F$ et qu'aucune place au-dessus de $p$ ne se décompose dans l'extension $F(\mu_{p^\infty})/F(\mu_{p^r})$. Posons $E = F(\mu_{p^r})$ et $G = \mathrm{Gal}\ (E/F)$. On a un isomorphisme de modules galoisiens $H_{2i}F \simeq \big((Cl_S(E)/p^r)(i)\big)_G$, où $Cl_S(E)$ désigne le groupe des $S$-classes d'idéaux de $E$.*

**Preuve** : D'après 1.2, $H_{2i}F \simeq (H_{2iE})_G = (H_{2i}E)_G/p^r$. Par définition et d'après la dualité de Poitou-Tate, $(H_{2i}\,E)_G/p^r$ est le dual de ${}_{p^r}\ \mathrm{Ker}^1_S(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))^G$ où $\mathrm{Ker}^1_S(E,\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))$ désigne le noyau de la localisation $H^1(G_S(E),\ \mathbb{Q}_p(\mathbb{Z}_p(-i)) \to \oplus_{v\in S} H^1(E_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))$ et ${}_{p^r}(.)$ la $p^r$-torsion. À partir de la suite exacte $0 \to \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(-i) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i) \to 0$ et avec l'hypothèse supplémentaire de non décomposition, il est immédiat de voir que ${}_{p^r}\ \mathrm{Ker}^1_S(E,\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))$ est le noyau de la localisation $H^1(G_S(E),\ \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(-i)) \to \oplus_{v\in S} H^1(E_v,\ \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(-i))$. Mais $H^1(G_S(E),\ \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(-i)) = \mathrm{Hom}\,(G_S(E),\ \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})(-i)$, et par le corps de classes, le noyau précédent est le dual de $\big(Cl_S(E)/p^r\big)(i)$. En résumé, $H_{2i}F \simeq \big((Cl_S(E)/p^r)(i)\big)_G$, comme annoncé. $\square$

On étudie aussi facilement le cas où $F$ contient "suffisamment" de racines de l'unité ([So], [JS]).

**Corollaire 1.5** (cf [So], ou [JS], théo. 7-i))

*Supposons que $H_{2i}F$ est annulé par $p^s$ et que $F$ contient $\mu_{p^{s+1}}$. Alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$, l'identité de $X$ induit un isomorphisme de modules galoisiens $H_{2i}F \simeq (H_{2j}F)(i-j)$.*

**Preuve** : C'est évident, d'après 1.3. $\square$

**Corollaire 1.6** (cf. [JS], théor. 7-ii))

*Si $H_{2i}F$ est annulé par $p^s$ mais $F$ contient seulement $\mu_{p^s}$, suppsons en outre que l'extension $H_{2i}F \to H_{2i}F(\mu_{p^{s+1}})$ est injective. Alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, l'identité de $X$ induit un isomorphisme de modules galoisiens $H_{2i}F \simeq (H_{2j}F)(i-j)$.*

**Preuve** : Posons $E = F(\mu_{p^{s+1}})$ et $G =\ \mathrm{Gal}\ (E/F)$.

Si l'extension $H_{2i}F \to (H_{2i}\,E)^G$ est injective, elle est également surjective, car $(H_{2i}\,E)^G$ et $(H_{2i}\,E)_G \simeq H_{2i}\,F$ ont même ordre (le groupe $G$ étant cyclique). Alors, d'après 1-2 b), on a $H_{2i}\,F \xrightarrow{\sim} \nu_G(H_{2i}\,E)$.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, notons $\overline{\nu}^{(j)}$ l'endomorphisme de $H_{2j}\,E/p^{s+1}$ obtenu à partir de $\nu_G$ par passage au quotient modulo $p^{s+1}$. Commes les $\overline{\nu}^{(j)}$ sont congrus entre eux modulo $p^{s+1}$, on a, avec des notations évidentes, un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
H_{2j}\,E/p^{s+1} \arrow[rr, two heads, "\overline{\nu}^{(j)}"] \arrow[d, "\wr"] & & Im\,\overline{\nu}^{(j)} \arrow[d, equal] \\
H_{2i}\,E/p^{s+1}(j-i) \arrow[rr, two heads, "\overline{\nu}^{(j)}"] \arrow[dr, "\overline{cores}"'] & & Im\,\overline{\nu}^{(j)} \\
& (H_{2i}F)(j-i) \arrow[ur, "\sim", "\overline{res}"'] &
\end{tikzcd}
$$

qui montre que $\overline{\nu}^{(j)}$ admet une section, égale à l'application $\overline{\text{res}}^{-1}$ suivie du "twist" $(j-i)$ de la composée $H_{2i}\,F \xrightarrow{\text{res}} H_{2i}\,E \xrightarrow{\text{nat}} H_{2i}\,E/p^{s+1}$. Donc $H_{2j}\,E/p^{s+1} \simeq H_{2i}\,F(j-i) \oplus \text{Ker}\,\overline{\nu}^{(j)}$. Mais le diagramme montre aussi que $\text{Ker}\,\overline{\nu}^{(j)}$ est isomorphe à l'image par $\overline{\text{cores}}$ de $p^s\,H_{2j}\,E/p^{s+1}\,H_{2j}\,E$, donc est annulé par $p$ (cette dernière propriété est bien connue, voir e.g. [KM], [T], ...). Par suite, $H_{2j}\,E$ est annulé par $p^s$. □

**Remarque :** L'hypothèse d'injectivité de 1.6 est "expliquée" en 2.9 ci-dessous.

## § 2 - Descente :

On a vu que, par construction même,les noyaux $H_{2i}(.)$ se comportent bien vis-à-vis de la co-descente galoisienne (i.e. en prenant les co-invariants) dans la tour $F(\mu_{p^\infty})/F$. On ne peut naturellement pas en attendre autant par descente galoisienne (i.e. en prenant les invariants), à cause de phénomènes de capitulation. Il convient alors de modifier légèrement les noyaux $H_{2i}(.)$.

**Lemme 2.1 - définition**

*On garde les notations du § 1. Soit $X^0$ le sous-module fini maximal de $X$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ t.q. $F$ vérifie la conjecture $(C_i)$, $(X^0(i))_\Gamma$ s'injecte dans $X(i)_\Gamma$, et l'on notera $\widetilde{H}_{2i}\,F = \widetilde{X}(i)_\Gamma$ le conoyau.*

**Preuve** : En posant $\widetilde{X} = X/X^0$, la suite exacte $0 \to X^0(i) \to X(i) \to \widetilde{X}(i) \to 0$ donne par co-descente une suite exacte $\ldots \to \widetilde{X}(i)^\Gamma \to X^0(i)_\Gamma \to X(i)_\Gamma \to \widetilde{X}(i)_\Gamma \to 0$. Or le $\Lambda$-module de torsion $\widetilde{X}(i)$ a même série caractéristique que $X(i)$ et n'a pas de sous-module fini non nul. La conjecture $(C_i)$ signifie que $\widetilde{X}(i)^\Gamma$ est fini, donc nul. □

**Définition 2.2**

Rappelons que pour un $\Lambda$-module de torsion $Y$, le *co-adjoint* $\beta(Y)$ est défini comme étant le conoyau de la localisation : $Y \to \bigoplus_{\mathfrak{P}} Y_{\mathfrak{P}}$, où $\mathfrak{P}$ parcourt tous les idéaux premiers de hauteur 1 de $\Lambda$. C'est le dual de l'adjoint $\alpha(Y)$ au sens d'Iwasawa ([Iw], 1.3). On sait que pour toute *suite admissible* d'éléments $\pi_n \in \Lambda$ (i.e. les $\pi_n$ sont disjoints du diviseur de $Y$

et convergent vers 0, et $\pi_n$ divise $\pi_{n+1}$ pour tout $n$), $\beta(Y) \simeq \varinjlim Y/\pi_n Y$. En particulier, si $\mu(Y) = 0$, la suite des $p^n$ est admissible, et $\beta(Y)$ n'est autre que $Y \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

Notons $E_0 = F$, $E_n = F(\mu_{p^n})$ et $E_\infty = F(\mu_{p^\infty})$. Nous dirons que $E_\infty$ *vérifie la conjecture* $(C_i)$ si tous les $E_n$ ($n \geq 0$) vérifient $(C_i)$ (il s'agit en fait d'une propriété "finie", qu'il suffit de vérifier pour tout $n \leq \lambda(X)$). Notre but principal va être de montrer le résultat suivant, qui fait pendant au théo. 1.1 de Schneider :

**Théorème 2.3**

*Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tel que $E_\infty$ vérifie la conjecture $(C_i)$, on a un isomorphisme canonique $\widetilde{H}_{2i}\, F \simeq \beta(X)(i)^\Gamma$, où $\Gamma =$ Gal $(E_\infty/F)$.*

La démonstration va se faire par une succession de lemmes. Notons $H_{2i}\, E_\infty = \varinjlim H_{2i}\, E_n$, $\widetilde{H}_{2i}\, E_\infty = \varinjlim \widetilde{H}_{2i}\, E_n$ (les morphismes de liaison étant les extensions naturelles) et $\mathrm{Cap}^{(i)}(E_\infty/E_n) = \mathrm{Ker}\,(H_{2i}\, E_n \to H_{2i}\, E_\infty)$.

**Lemme 2.4**

*Dans les hypothèses de 2.3, on a :*

*a) des isomorphismes $H_{2i}\, E_\infty = \widetilde{H}_{2i}\, E_\infty \simeq \beta(X(i))$*

*b) un isomorphisme $\widetilde{H}_{2i}\, F \simeq \left(\widetilde{H}_{2i}\, E_\infty\right)^\Gamma$*

*c) un diagramme commutatif (comparer à [KM], 3.6)*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{Cap}^{(i)}(E_\infty) & \to & H_{2i}\, F & \xrightarrow{\text{ext}} & \left(H_{2i}\, E_\infty\right)^\Gamma & \to & 0 \\
 & & \uparrow \wr & & \| & & \uparrow \wr & & \\
0 & \to & \left(X^0(i)\right)_\Gamma & \to & H_{2i}\, F & \to & \widetilde{H}_{2i}\, F & \to & 0,
\end{array}$$

*les flèches verticales étant induites par l'homomorphisme d'extension.*

**Preuve :**

Dans a), l'isomorphisme $H_{2i}\, E_\infty \simeq \beta(X(i))$ résulte immédiatement de la conjecture $(C_i)$ pour $E_\infty$ et de la description du co-adjoint. Pour l'égalité $H_{2i}\, E_\infty = \widetilde{H}_{2i}\, E_\infty$, il suffit de remarquer que l'extension naturelle $X(i)_{\Gamma_n} \to X(i)_{\Gamma_m}$ (pour $m \geq n$) n'est autre que la multiplication par $\dfrac{\gamma^{p^m} - 1}{\gamma^{p^n} - 1}$, donc annule le sous-module fini borné $X^0(i)_{\Gamma_n}$ pour $m \gg n \gg 0$.

Pour montrer b), notons d'abord que l'extension $\widetilde{X}(i)_{\Gamma_n} \to \widetilde{X}(i)_{\Gamma_m}$ est injective : c'est un calcul immédiat, en utilisant la nullité de $\widetilde{X}(i)^{\Gamma_m}$ (qui résulte de la conjecture $(C_i)$ et de la nullité de $\widetilde{X}^0$). Soit $G_{m,n} = \Gamma_m/\Gamma_n$. Comme c'est un groupe cyclique, les invariants et les co-invariants par $G_{m,n}$ de $\widetilde{X}(i)_{\Gamma_m}$ ont même ordre, d'où l'isomorphisme $\widetilde{X}(i)_{\Gamma_n} \xrightarrow{\sim}$

$\widetilde{X}(i)_{\Gamma_m}^{G_{m,n}}$, ce qui montre que $\widetilde{H}_{2i}\,F \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}_{2i}\,(E_\infty)^\Gamma$ par passage à la limite. L'assertion c) est alors évidente. $\square$

L'étape suivante est purement algébrique : elle consiste à montrer que les foncteurs "co-adjoint" et "twist" commutent. Plus précisément :

**Lemme 2.5**

*Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\beta(X(i)) \simeq \beta(X)(i)$.*

**Preuve** :

Soit $(\pi_n)$ une suite admissible pour $X$. Alors $\beta(X)(i) \simeq \varinjlim \,(X/\pi_n X)(i)$. Mais $(X/\pi_n X)(i) = X(i)/\pi_n^{(-i)}X(i)$, avec des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes (comme dans la preuve de 1.3). Evidemment, $(\pi_n^{(-i)})$ est une suite admissible pour $X^{(i)}$, d'où le résultat cherché. $\square$

Le théorème 2.3 résulte immédiatement des lemmes 2.4 et 2.5.

<u>Cas particuliers</u> :

i) Si le sous-module fini maximal de $X$ (c'est un noyau de capitulation) est nul, on peut remplacer $\widetilde{H}_{2i}\,F$ par $H_{2i}\,F$ dans tous les résultats précédents.

ii) S'il n'y a qu'une seule place au-dessus de $p$ dans $E_0$ et qu'elle est totalement ramifiée dans $E_\infty$, on sait que $X_{\Gamma_n}$ est isomorphe au $p$-groupe des $S$-classes de $E_n$, donc $\beta(X)$ est isomorphe au $p$-groupe des $S$-classes de $E_\infty$.

On peut déduire du théorème 2.3 des conséquences parallèles à celles qu'on a tirées du théorème 1.1.

**Corollaire 2.6**

*Dans les hypothèses de 2.3, soit $L/K$ une extension finie, de groupe de Galois $G$, contenant $F$ et contenue dans $E_\infty$. Alors $\widetilde{H}_{2i}\,L$ est cohomologiquement trivial pour $G$, et $H_{2i}\,L$ et $\mathrm{Cap}^{(i)}(E_\infty/L)$ ont même cohomologie.*

**Preuve** :

Par définition, la co-descente induit un isomorphisme $(\widetilde{H}_{2i}\,L)_G \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}_{2i}\,K$. D'après 2.4, l'extension induit un isomorphisme $\widetilde{H}_{2i}\,K \xrightarrow{\sim} (\widetilde{H}_{2i}\,L)^G$, d'où l'on déduit, en reprenant le raisonnement de 1.2, que $\nu_G(\widetilde{H}_{2i}\,L) = (\widetilde{H}_{2i}\,L)^G$. Comme $G$ est cyclique, la trivialité cohomologique de $\widetilde{H}_{2i}\,L$ en découle immédiatement. La dernière assertion est alors évidente. $\square$

**Corollaire 2.7**

*Pour tout entier $m$ tel que $F$ contient $\mu_{p^m}$ (resp. $4$ si $p = 2$ et $m = 1$), pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $E_\infty$ vérifie $(C_i)$ et $(C_j)$, on a un isomorphisme de modules galoisiens $_{p^m}\widetilde{H}_{2i}\,F \simeq \left(_{p^m}\widetilde{H}_{2j}\,F\right)(i-j)$.*

**Preuve** : c'est évident, en utilisant 2.3. $\square$

**Corollaire 2.8**

*Supposons que $E_\infty$ vérifie $(C_i)$ et soit $p^s$ l'exposant de $\widetilde{H}_{2i}\,F$. Posons $E = F(\mu_{p^s})$ et $G =$ Gal $(E/F)$. On a un isomorphisme de modules galoisiens $\widetilde{H}_{2i}\,F \simeq \left({}_{p^s}\widetilde{Cl}(E)\,(i)\right)^G$, où $\widetilde{Cl}(.)$ désigne le groupe des classes logarithmiques (voir la remarque suivant 1.1).*

**Preuve** : D'après 2.3, ${}_{p^s}\widetilde{H}_{2i}\,F \simeq \left({}_{p^s}\widetilde{H}_{2i}\,E\right)^G$ et d'après 2.7, ${}_{p^s}\widetilde{H}_{2i}\,E \simeq {}_{p^s}\widetilde{H}_0\,E(i) = {}_{p^s}\widetilde{Cl}(E)\,(i)$. $\square$

**Corollaire 2.9**

*Supposons que $E_\infty$ vérifie $(C_i)$ et que $F$ contient $\mu_{p^s}$, où $p^s$ est l'exposant de $\widetilde{H}_{2i}\,F$. Si $E_\infty$ vérifie également $(C_j)$, on a un isomorphisme de modules galoisiens $\widetilde{H}_{2i}\,F \simeq (\widetilde{H}_{2j}\,F)(i-j)$.*

**Preuve** : C'est la même démonstration que dans 2.8, en remplaçant $\widetilde{H}_0$ par $\widetilde{H}_{2j}$. $\square$

## Bibliographie


[FGS] L.J. Federer and B.H. Gross. Regulators and Iwasawa modules. *Invent. Math.*, 62 (3) : 443-457, 1981. With an appendix by Warrren Sinnot.

[Iw] K. Iwasawa. On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields. *Annals of Math.*, 98, 246-326, 1973.

[J] J.-F. Jaulent. Sur le noyau sauvage des corps de nombres. *Acta Arithm.*, 67, 335-348, 1994.

[JS] J.-F. Jaulent et F. Soriano. Sur le noyau sauvage des corps de nombres et le groupe des classes logarithmiques. *Math. Zeit.*, 238 (2), 335-354, 2001.

[Ke] F. Keune. On the structure of the $K_2$ of the ring of integers in a number field. *K-Theory*, 2, 625-645, 1989.

[KM] M. Kolster and A. Movahhedi. Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation. *Ann. Inst. Fourier*, 50 (1), 35-65, 2000.

[Ko] M. Kolster. Remarks on étale $K$-theory and Leopoldt's conjecture. In *Séminaire de Théorie des Nombres*, Paris, 1991-92, 37-62, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[N] T. Nguyen Quang Do. Analogues supérieurs du noyau sauvage. *Séminaire de Théorie des Nombres Bordeaux (2)*, 4 (2) : 263-271, 1992.

[Sc] P. Schneider. Über gewisse Galoiscohomologiegruppen. *Math. Zeit.*, 168 (2) : 181-205, 1979.

[So] F. Soriano-Gafiuk. Sur le noyau hilbertien d'un corps de nombres. *C.R. Acad. Sci. Paris sér. I Math.*, 330 (10) : 863-866, 2000.

[T] J. Tate. Relations between $K_2$ and Galois cohomology. *Invent. Math.*, 36 : 257-274, 1976.

Laboratoire de Mathématiques
UMR 6623
Université de Franche-Comté
25030 Besançon Cedex